Departamento de Matemática Aplicada a la I.T.T.

ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
EXAMEN FINAL (Otoño 2013) **Duración:** 3 horas
FECHA: 9 de Enero de 2014
Fecha publicación notas: 16-01-2014 **Fecha revisión examen:** 20-01-2014
APELLIDOS Y NOMBRE:
DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *(1 punto) En la fabricación de cierto artículo se presenta un primer tipo de defecto con una probabilidad 0.1 y un segundo tipo de defecto con probabilidad 0.05. Se supone independencia entre los dos tipos de defecto.*

a) Calcula la probabilidad de que un artículo sea defectuoso.

Solución.

Sea D_1 el suceso: Un artículo tiene defectos del primer tipo.

Sea D_2 el suceso: Un artículo tiene defectos del segundo tipo.

Sea D el suceso: Un artículo es defectuoso.

$$P(D_1) = 0.1, \quad P(D_2) = 0.05$$

$$P(D) = P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = 0.1 + 0.05 - 0.005 = 0.145$$

b) Suponiendo que un artículo es defectuoso, calcula la probabilidad de que tenga sólo un tipo de defecto.

Solución.

$$P((D_1 \cap \overline{D_2}) \cup (D_2 \cap \overline{D_1})/D) = \frac{P(((D_1 \cap \overline{D_2}) \cup (D_2 \cap \overline{D_1})) \cap D)}{P(D)} =$$

$$\frac{P((D_1 \cap \overline{D_2} \cap D) \cup (D_2 \cap \overline{D_1} \cap D))}{0.145} = \frac{P((D_1 \cap \overline{D_2}) \cup (D_2 \cap \overline{D_1}))}{0.145} =$$

$$\frac{P(D_1 \cap \overline{D_2}) + P(D_2 \cap \overline{D_1})}{0.145} = \frac{P(D_1) - P(D_1 \cap D_2) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2)}{0.145} =$$

$$\frac{0.1 - 0.005 \cdot 2 + 0.05}{0.145} \simeq 0.965$$

Ejercicio 2 *(1.5 puntos) Dos personas A y B lanzan alternativamente un par de dados. A lanza primero los dados, ganando A el juego si obtiene una suma igual a 6; en caso contrario, el juego continúa lanzando B los dados, ganando B el juego si obtiene una suma igual a 7; en caso contrario, el juego continúa lanzando de nuevo A y así sucesivamente hasta que gane uno del dos jugadores.*

a) Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados se obtenga una suma igual a 6.

Calcula la probabilidad de que al lanzar dos dados se obtenga una suma igual a 7.

Solución.

$p_1 = P(\text{suma igual a } 6) = \frac{5}{VR_{6,2}} = \frac{5}{36}$; $p_2 = P(\text{suma igual a } 7) = \frac{6}{VR_{6,2}} = \frac{6}{36}$

b) Calcula la probabilidad de que el número de veces que hay que lanzar los dos dados para que gane A el juego sea 3*.*

Solución.

Sea $X \equiv$ número de lanzamientos de los dos dados hasta que gane A.

$P(X=3) = (1-p_1)(1-p_2)p_1 = (1-\frac{5}{36})(1-\frac{6}{36})\frac{5}{36} \simeq 0.099$

c) Calcula la probabilidad de que el número de veces que hay que lanzar los dos dados para que gane B el juego sea 4*.*

Solución.

Sea $X \equiv$ número de lanzamientos de los dos dados hasta que gane B.

$P(X=4) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_1)p_2 = (1-\frac{5}{36})(1-\frac{6}{36})(1-\frac{5}{36})\frac{6}{36} \simeq 0.102$

Ejercicio 3 *(1 punto) Sea X la variable aleatoria con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} x-9 & \textit{si } 9 < x < 10 \\ 11-x & \textit{si } 10 < x < 11 \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

Calcula $P(|X-10| > 0.5)$
Solución.

$$\begin{aligned} P(|X-10| > 0.5) =& P(X-10 > 0.5) + P(X-10 < -0.5) \\ =& 2 \cdot P(X > 10.5) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(11-10.5) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ejercicio 4 *(1 punto) Sean $X_i \quad i = 1, \ldots 100$, variables aleatorias independientes, cada una de ellas con distribución Poisson de parámetro 2.*

Utiliza el Teorema Central del Límite para calcular aproximadamente $P(190 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 210)$.

Solución.

$$X_i \sim Pois(2), \qquad E(X_i) = Var(X_i) = 2$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 200$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} Var(X_i) = 200$$

Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \overset{aprox}{\sim} N(\mu = 200, \sigma = 10\sqrt{2})$$

$$
\begin{aligned}
P\left(190 < \sum_{i=1}^{100} X_i < 210\right) =& P\left(\frac{190-200}{10\sqrt{2}} < Z < \frac{210-200}{10\sqrt{2}}\right) \\
=& F_Z(1/\sqrt{2}) - F_Z(-1/\sqrt{2}) \\
=& 2F_Z(1/\sqrt{2}) - 1 \simeq 0.52
\end{aligned}
$$

Ejercicio 5 *(1.5 puntos)*

Sea X una población tal que $X \sim N(\mu = 23, \sigma = 6)$. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 9.

Nota: *Sea X una variable aleatoria con distribución Chi cuadrado con 8 grados de libertad. La siguiente tabla muestra los valores de su función de distribución en diferentes abscisas*

x	*1.64*	*2.73*	*6.87*	*13.36*
$P(X \leq x)$	*0.01*	*0.05*	*0.45*	*0.90*

a) Calcula $P(18.72 < \overline{X} < 25.76)$

Solución.

Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ se verifica que $\overline{X} \sim N\left(\mu, \sigma/\sqrt{n}\right)$

Por tanto $\overline{X}$ sigue una distribución normal de media 23 y desviación típica 2.

$$
\begin{aligned}
P(18.72 < \overline{X} < 25.76) = P\left(\frac{18.72-23}{2} < Z < \frac{25.76-23}{2}\right) = P(-2.14 < Z < 1.38) \\
= F_Z(1.38) - [1 - F_Z(2.14)] = 0.916 - 1 + 0.983 = 0.899
\end{aligned}
$$

b) Calcula $P(S_1^2 > 60.12)$

Solución.

$$
\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}
$$

$$
\frac{8S_1^2}{36} \sim \chi^2_8
$$

$$
P(S_1^2 > 60.12) = P\left(\frac{8S_1^2}{36} > 60.12 \cdot \frac{8}{36}\right) = P\left(\chi^2_8 > 13.36\right) = 0.10
$$

c) *Determina k de manera que $P(S_1^2 > k) = 0.95$*

Solución.

$$0.95 = P(S_1^2 > k) = P\left(\frac{8S_1^2}{36} > k\frac{8}{36}\right) = P\left(\chi_8^2 > \frac{8k}{36}\right)$$

$$P\left(\chi_8^2 \leq \frac{8k}{36}\right) = 0.05$$

$$\frac{8k}{36} = 2.73$$

$$k = 12.28$$

Ejercicio 6 *(1 punto) Sea (X, Y) una variable aleatoria con función de densidad conjunta*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{y}\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\mathrm{e}^{-y} & \text{si } x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcula

a) $f_Y(y)$

Solución.

$$f_Y(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{y}\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\mathrm{e}^{-y}\,dx = \mathrm{e}^{-y}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\Big|_0^\infty\right) = \mathrm{e}^{-y}, \quad y > 0$$

es decir, $Y \sim Exp(1)$

b) $P(2Y > X)$

Solución.

$$P(2Y > X) = \int_0^\infty \left(\int_0^{2y} \frac{1}{y}\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\mathrm{e}^{-y}\,dx\right)dy = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{x}{y}}\Big|_0^{2y}\right)dy$$
$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y}(-\mathrm{e}^{-2}+1)\,dy = 1 - \mathrm{e}^{-2}$$

Ejercicio 7 *(1.5 puntos) Sean $A(t)$ y $B(t)$ dos procesos estocásticos independientes, estacionarios en sentido amplio con media 0 y la misma función de autocorrelación que denotamos por $R(\tau)$*

Consideremos los procesos $X(t) = A(t)\operatorname{sen} t,\ \ Y(t) = B(t)\cos t$

a) *Calcula $E[X(t)]$*

   Solución.

   Sabemos que $E[A(t)] = 0$

$$E[X(t) = E[A(t)\operatorname{sen} t] = \operatorname{sen} t E[A(t)] = 0$$

b) *Calcula, en función de $R(\tau)$, las funciones de autocorrelación de $X(t)$ y de $Y(t)$, $R_X(t, t{+}\tau)$ y $R_Y(t, t + \tau)$*

   Solución.

   Sabemos que $R_A(t, t + \tau) = R_B(t, t + \tau) = R(\tau)$ y que $A(t)$ y $B(t)$ son independientes.

$$\begin{aligned}
R_X(t, t + \tau) =& E[X(t) \cdot X(t + \tau) = E[A(t)\operatorname{sen} t \cdot A(t + \tau)\operatorname{sen}(t + \tau)] \\
=& \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t + \tau)E[A(t) \cdot A(t + \tau)] = \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t + \tau)R_A(t, t + \tau) \\
=& \operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t + \tau)R(t, t + \tau)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_Y(t, t + \tau) =& E[Y(t) \cdot Y(t + \tau) = E[B(t)\cos t \cdot B(t + \tau)\cos(t + \tau)] \\
=& \cos t \cos(t + \tau)E[B(t) \cdot B(t + \tau)] = \cos t \cos(t + \tau)R_B(t, t + \tau) \\
=& \cos t \cos(t + \tau) \cdot R(t, t + \tau)
\end{aligned}$$

c) *¿Son los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ estacionarios en sentido amplio?*

   Solución.

   $X(t)$ e $Y(t)$ no son estacionarios en sentido amplio, ya que R_X y R_Y son funciones de t y $t + \tau$ y no sólo de τ

d) *Sea ahora el proceso $Z(t) = X(t) + Y(t)$*

   Calcula, en función de $R(\tau)$, la función de autocorrelación de $Z(t)$, $R_Z(t, t + \tau)$ ¿Es el proceso $Z(t)$ estacionario en sentido amplio?

   Solución.

$$\begin{aligned}
E[Z(t)] =& E[X(t) + Y(t)] = E[X(t)] + E[Y(t)] = 0 \\
R_Z(t, t + \tau) =& E[(X(t) + Y(t)) \cdot (X(t + \tau) + Y(t + \tau))] \\
=& E[X(t) \cdot X(t + \tau)] + E[X(t) \cdot Y(t + \tau)] + E[Y(t) \cdot X(t + \tau)] + E[Y(t) \cdot Y(t + \tau)] \\
=& (\operatorname{sen} t \operatorname{sen}(t + \tau) + \cos t \cos(t + \tau)) \cdot R(\tau) = \cos\tau \cdot R(\tau)
\end{aligned}$$

   Por tanto, $Z(t)$ es estacionario en sentido amplio

Ejercicio 8 *(1.5 puntos) Sea $X(t)$ un proceso aleatorio gaussiano con media 0 y función de autocorrelación $R_X(t, t+\tau) = 4e^{-2|\tau|}$.*

a) *Calcula la distribución de $X(2)$*

Solución.

$Var[X(t)] = R_X(0) = 4$

$X(2) \sim N(\mu = 0, \sigma = 2)$.

b) *Calcula la distribución conjunta de $X(2)$ y $X(7)$*

Solución.

$$\begin{pmatrix} X(2) \\ X(7) \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} E[X(2)] \\ E[X(7)] \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Var[X(2)] & C_X(2,7) \\ C_X(2,7) & Var[X(7)] \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} X(2) \\ X(7) \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4e^{-10} \\ 4e^{-10} & 4 \end{pmatrix} \right)$$

c) *¿Son independientes $X(2)$ y $X(8)$?*

Solución.

$Cov(X(2), X(8)) = C_X(2,8) = R_X(6) = 4e^{-12} \neq 0$

Por tanto $X(2)$ y $X(8)$ no son independientes.

d) *Calcula $P(X(7) + 4X(9) > 15)$*

Solución.

$$\begin{pmatrix} X(7) \\ X(9) \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 4e^{-4} \\ 4e^{-4} & 4 \end{pmatrix} \right)$$

Entonces

$$X(7) + 4X(9) \sim N \left(\mu = 0, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4e^{-4} \\ 4e^{-4} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$

Esto es

$$X(7) + 4X(9) \sim N \left(\mu = 0, \sigma^2 = 32e^{-4} + 68 \right)$$

$P(X(7) + 4X(9) > 15) = P\left(Z > \frac{15}{\sqrt{32e^{-4}+68}} \right) = 1 - F_Z(1.81) \simeq 0.03515$

e) *Calcula el coeficiente de autocorrelación entre las variables aleatorias $X(7)$ y $X(9)$. ¿Hay relación lineal apreciable entre ellas? Justifica la respuesta.*

Solución.

$$\rho(X(7), X(9)) = \frac{C_X(2)}{\sqrt{Var[X(7)]Var[X(9)]}} = \frac{4e^{-4}}{4} = e^{-4} = 0.0183$$

No hay relación lineal apreciable entre ellas ya que el coeficiente de autocorrelación está muy próximo a 0.