ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
EXAMEN FINAL (Otoño 2014-2015) **Duración:** 3 horas
FECHA: 14 de Enero de 2015
Fecha publicación notas: 20 de Enero de 2015 **Fecha revisión examen:** 23 de Enero de 2015
APELLIDOS:
NOMBRE:
DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *(1 punto) Se sabe que* $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/5$ *y que* $P(A \cap B) = 0$. *Indica,* **justificando la respuesta**, *si es correcta o incorrecta cada una de las siguientes afirmaciones:*

(a) A *y* B *son independientes.*

Solución.

Es incorrecta, ya que $0 = P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B) = 1/15$.

(b) A *y* B *son mutuamente excluyentes.*

Solución.

Es correcta, ya que $P(A \cap B) = 0$ *y por tanto* $A \cap B = \Phi$.

(c) $P(A \cup B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$.

Solución.

Es correcta, ya que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

(d) A *y* B *son complementarios.*

Solución.

Es incorrecta, ya que, pese a ser A *y* B *incompatibles,* $P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \neq 1$

Ejercicio 2 *(1 punto) En un laboratorio hay 5 cultivos de la bacteria Mycoplasma pneumoniae. Hay 3 más virulentos, de manera que la probabilidad de que una cobaya inoculada con ellos contraiga la neumonía atípica es del 95 %, mientras que con los dos restantes esa probabilidad es del 70 %.*

(a) Se inocula una cobaya con un cultivo elegido al azar, ¿cuál es la probabilidad de que contraiga la enfermedad?

Solución.

Sean los sucesos:

E*: La cobaya contrae la neumonía.*

V*: El cultivo con el que se inocula es virulento.*

Como $\{V, \overline{V}\}$ *constituye una partición del espacio muestral, podemos aplicar el Teorema de la Probabilidad Total para calcular la probabilidad del suceso* E,

$$P(E) = P(E/V)P(V) + P(E/\overline{V})P(\overline{V}) = 0.95 \cdot \frac{3}{5} + 0.7 \cdot \frac{2}{5} = 0.85$$

(b) *Si una cobaya inoculada no ha contraído la neumonía, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya sido con uno de los cultivos más virulentos?*

Solución.

Aplicando la Regla de Bayes,

$$P(V/\overline{E}) = \frac{P(\overline{E}/V)P(V)}{P(\overline{E})} = \frac{[1 - P(E/V)]P(V)}{1 - P(E)} = \frac{0.05 \cdot \frac{3}{5}}{0.15} = 0.2$$

Ejercicio 3 *(1 punto) Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución Poisson de media λ. Se define una nueva variable aleatoria Y del siguiente modo:*

$$\begin{aligned} &Y = X/2, && \text{si } X \text{ es par y distinto de } 0 \\ &Y = 0, && \text{si } X = 0 \text{ ó } X \text{ es impar} \end{aligned}$$

Calcula $P(Y = 7)$ y $P(Y = 0)$ en función de λ.

Indicación: $\lambda + \dfrac{\lambda^3}{3!} + \ldots \dfrac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \dfrac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}$

Solución.

Y toma los valores $1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots$ cuando X toma los valores $2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots$, respectivamente Y toma el valor 0 cuando X toma el valor 0 ó alguno de los valores $1, 3, 5, 7 \ldots, 2n - 1, \ldots$.

$$P(Y = 7) = P\left(\frac{X}{2} = 7\right) = P(X = 14) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{14}}{14!}$$

$$\begin{aligned} P(Y = 0) =& P(X = 0) + P(X\,impar) \\ =& e^{-\lambda} + e^{-\lambda}\left[\lambda + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] \\ =& e^{-\lambda}\left(1 + \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}\right) = e^{-\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{2} \end{aligned}$$

Ejercicio 4 *(1 punto) Obtén un intervalo de confianza al 94 % para el parámetro θ de una determinada distribución de probabilidad si se sabe que el estadístico: $T(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta) = 2\,\theta \sum_{i=1}^{n} X_i$, sigue una distribución χ^2_{2n} y que, en una muestra de tamaño $n = 10$, $\sum_{i=1}^{10} x_i = 550.87$.*

Nota : *Sea Y una variable aleatoria con distribución χ^2 con 20 grados de libertad. La siguiente tabla muestra los valores de su función de distribución en diferentes abscisas*

y	9.89	12.44	19.33	28.41	33.46	37.56
$P(Y \leq y)$	0.03	0.1	0.5	0.9	0.97	0.99

Solución.

$$2\,\theta \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$$

$$P(q_{0.03} < 2\theta \sum_{i=1}^{n} X_i < q_{0.97}) = 0.94$$

$$P\left(\frac{q_{0.03}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i} < \theta < \frac{q_{0.97}}{2\sum_{i=1}^{n} X_i}\right) = 0.94$$

Por tanto, un intervalo de confianza al 94 % para θ sería

$$\left(\frac{q_{0.03}}{2\sum_{i=1}^{n} x_i}, \frac{q_{0.97}}{2\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)$$

Mirando la tabla y teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^{10} x_i = 550.87$ resulta finalmente

$$\left(\frac{9.89}{2 \cdot 550.87}, \frac{33.46}{2 \cdot 550.87}\right) = (0.0089, 0.0303)$$

Ejercicio 5 *(1 punto) Se seleccionan aleatoriamente 100 estudiantes de una universidad y se observa que 82 de ellos son no fumadores. En base a esto contrasta, con un nivel de significación igual a 0.06, si la proporción de estudiantes no fumadores en la universidad es del 70 %.*

Solución.

Sea p la proporción de estudiantes no fumadores en la población.

Debemos contrastar la hipótesis nula

$H_0 : p = 0.7$

frente a la hipótesis alternativa

$H_1 : p \neq 0.7$

Si H_0 es cierta y X el número de estudiantes no fumadores en la muestra, el estadístico

$$\frac{X - 0.7n}{\sqrt{0.7(1-0.7)n}} \overset{aprox}{\sim} N(0, 1)$$

El valor del estadístico en la muestra es

$$\frac{82 - 0.7 \cdot 100}{\sqrt{0.7(1-0.7) \cdot 100}} \approx 2.62$$

$$p\text{-}valor = 2 \cdot P(Z > 2.62) = 2(1 - F_Z(2.62)) \approx 0.009$$

siendo F_Z la función de distribución de la variable aleatoria $Z \sim N(0, 1)$.

Como p-valor < 0.06, no hay evidencia para aceptar que la proporción de estudiantes no fumadores en la universidad es del 70 %.

Ejercicio 6 *(2 puntos)*

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2\sqrt{x}} & si\ \ 0 < y < x < 1 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$

(a) Calcula las distribuciones marginales.

Solución.

$$f_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{3}{2}\, x^{-1/2}\, dy = \frac{3}{2}\, x^{1/2} & si\ x \in (0, 1) \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_y^1 \frac{3}{2}\, x^{-1/2}\, dx = 3x^{1/2}\Big|_y^1 = 3(1 - y^{1/2}) & \textit{si } y \in (0,1) \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

(b) *Halla la media de X y la varianza de Y.*

Solución.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_0^1 \frac{3}{2}\, x^{3/2}\, dx = 3/5$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)\, dy = \int_0^1 3y(1 - y^{1/2})\, dy = \frac{3y^2}{2} - \frac{6y^{5/2}}{5}\Big|_0^1 = 3/10$$

$$E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\, dy = \int_0^1 3y^2(1 - y^{1/2})\, dy = y^3 - \frac{6y^{7/2}}{7}\Big|_0^1 = 1/7$$

$$\mathit{Var}(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{7} - \left(\frac{3}{10}\right)^2 = \frac{37}{700}$$

(c) *Calcula $P\left(X < \frac{1}{4},\ Y < \frac{1}{4}\right)$ y $P\left(X > \frac{1}{4}\right)$.*

Solución.

$$P\left(X < \frac{1}{4},\ Y < \frac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} dx \int_0^x \frac{3x^{-1/2}}{2}\, dy = \int_0^{1/4} \frac{3x^{1/2}}{2}\, dx = x^{3/2}\Big|_0^{1/4} = 1/8$$

$$P\left(X > \frac{1}{4}\right) = \int_{1/4}^1 \frac{3}{2}\, x^{1/2}\, dx = x^{3/2}\Big|_{1/4}^1 = 7/8$$

Ejercicio 7 *(1 punto)*

Sean X_1, X_2, X_3, X_4 cuatro variables aleatorias con la misma media μ y covarianza:

$$\mathrm{COV}(X_i, X_j) = \begin{cases} \sigma^2 & \textit{si } i = j \\ 0.2\ \sigma^2 & \textit{si } i = j+1 \textit{ ó } i = j-1 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Calcula la media y varianza de la variable aleatoria $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Solución.

$$E[Y] = E[\sum_{i=1}^4 X_i] = \sum_{i=1}^4 E[X_i] = 4\ \mu$$

$$\mathrm{VAR}(\sum_{i=1}^4 a_i X_i) = \mathbf{a}^\top M_{\mathbf{X}} \mathbf{a}$$

donde $\mathbf{a} = (1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1)^\top$ *y*

$$M_{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mathrm{VAR}(X_1) & \mathrm{COV}(X_1,X_2) & \mathrm{COV}(X_1,X_3) & \mathrm{COV}(X_1,X_4) \\ \mathrm{COV}(X_2,X_1) & \mathrm{VAR}(X_2) & \mathrm{COV}(X_2,X_3) & \mathrm{COV}(X_2,X_4) \\ \mathrm{COV}(X_3,X_1) & \mathrm{COV}(X_3,X_2) & \mathrm{VAR}(X_3) & \mathrm{COV}(X_3,X_4) \\ \mathrm{COV}(X_4,X_1) & \mathrm{COV}(X_4,X_2) & \mathrm{COV}(X_4,X_3) & \mathrm{VAR}(X_4) \end{pmatrix}$$

Tendríamos por tanto:

$$\mathrm{VAR}(X_1+X_2+X_3+X_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0.2\,\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0.2\,\sigma^2 & \sigma^2 & 0.2\,\sigma^2 & 0 \\ 0 & 0.2\,\sigma^2 & \sigma^2 & 0.2\,\sigma^2 \\ 0 & 0 & 0.2\,\sigma^2 & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5.2\,\sigma^2$$

Ejercicio 8 *(2 puntos)*

Sea $X(t)$ un proceso Gaussiano estacionario de media cero y función de autocorrelación

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 2 + \frac{2}{3}\tau & si \quad -3 \le \tau \le 0 \\ 2 - \frac{2}{3}\tau & si \;\; 0 \le \tau \le 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

(a) *Calcula la distribución de $X(1)$ indicando media y varianza.*

Solución. *Por ser el proceso Gaussiano $X(1)$ es una v.a. normal, con media la del proceso, es decir cero, y varianza $E[X(t) \cdot X(t)] - 0^2 = R_X(0) = 2$. Así, $X(1) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 = 2)$.*

(b) *Calcula la distribución conjunta de $X(1)$ y $X(2)$.*

Solución. *La distribución conjunta de $X(1)$ y $X(2)$ es normal bidimensional, por ser el proceso Gaussiano. El vector de medias es la media de $X(1)$ y $X(2)$ que resulta ser $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por ser el proceso estacionario la varianza de todas las variables aleatorias que intervienen en el proceso es idéntica y hemos visto que es 2. La covarianza entre $X(1)$ y $X(2)$ es $Cov[X(1),X(2)] = E[X(1)X(2)] - 0^2 = R_X(2-1) = R_X(1) = \frac{4}{3}$. Por tanto,*

$$\begin{pmatrix} X(1) \\ X(2) \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix} \right)$$

(c) *Calcula la distribución conjunta de $X(1)$, $X(2)$ y $X(4)$. ¿Son independientes $X(1)$ y $X(4)$? ¿Y $X(2)$ y $X(4)$?*

Solución. *Siguiendo un razonamiento análogo al del apartado anterior la distribución conjunta de $X(1)$, $X(2)$ y $X(4)$ es normal tridimensional, con vector de medias idénticamente cero. Nos falta hallar las covarianzas entre $X(1)$ y $X(4)$ y entre $X(2)$ y $X(4)$.*

$Cov[X(1),X(4)] = E[X(1)X(4)] - 0^2 = R_X(4-1) = R_X(3) = 0$ *y*
$Cov[X(2),X(4)] = E[X(2)X(4)] - 0^2 = R_X(4-2) = R_X(2) = \frac{2}{3}$. *Por tanto,*

$$\begin{pmatrix} X(1) \\ X(2) \\ X(4) \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{4}{3} & 2 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix} \right)$$

La v.a. $(X(1),\ X(4))$ es normal bidimensional, por lo que sus marginales, $X(1)$ y $X(4)$, son v.a. normales y $Cov[X(1), X(4)] = 0$, por lo que son independientes $X(1)$ y $X(4)$.

$Cov[X(2), X(4)]$ no es cero, por lo que las v.a. $X(2)$ y $X(4)$ no son independientes.

(d) Sea $Y(t) = X(t) \cdot \cos(wt)$, donde $w \in \mathbb{R}$ constante. Calcula la media y la varianza de $Y(t)$. Calcula la autocorrelación del proceso $Y(t)$ en términos de la autocorrelación del proceso $X(t)$. ¿Es $Y(t)$ estacionario en sentido amplio?

Solución.

$$\mu_Y(t) = E[Y(t)] = \cos(wt) \cdot E[X(t)] = \cos(wt) \cdot 0 = 0$$

$$V[Y(t)] = E[Y(t)^2] - 0^2 = E[\cos^2(wt) \cdot X(t)^2] = \cos^2(wt) \cdot E[X(t)^2] = 2 \cdot \cos^2(wt)$$

$$R_Y(t, t+h) = E[Y(t)Y(t+h)] = E[\cos(wt) \cdot X(t) \cdot \cos(w(t+h) \cdot X(t+h)] =$$

$$= \cos(wt) \cdot \cos(w(t+h)) \cdot E[X(t)X(t+h)] = \cos(wt) \cdot \cos(w(t+h)) \cdot R_X(h)$$

La función de autocorrelación, $R_Y(t, t+h)$, depende de t y de h, y no depende únicamente de h, por lo que $Y(t)$ no es estacionario en sentido amplio.