Departamento de Matemática Aplicada a la I.T.T.

ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

EXAMEN FINAL **Duración:** 2 horas 30'

Fecha: 10 de Julio de 2013

Fecha publicación notas: 15-07- 2013 **Fecha revisión examen:** 18-07-2013

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *(1 punto) Un departamento solicita dos colaboradores entre los alumnos del último curso de Grado. La persona que hace la selección decide elegirlos al azar porque no dispone de la información relativa a los expedientes de los 5 candidatos presentados.*

Suponiendo que los expedientes de los candidatos son todos diferentes,

(a) *Calcula la probabilidad de que, entre los dos elegidos, se encuentre uno de los dos mejores expedientes y el peor de ellos.*

Solución.

Todos los pares de colaboradores que se pueden formar con los 5 estudiantes son igualmente probables. En consecuencia, aplicando la regla de Laplace,

$$\frac{2}{C_{5,2}} = \frac{2}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{5}$$

(b) *Calcula la probabilidad de que se elija al estudiante con mejor expediente.*

Solución.

Aplicando la regla de Laplace

$$\frac{4}{C_{5,2}} = \frac{4}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}$$

(c) *Calcula la probabilidad de que se elija al menos uno de los dos estudiantes con mejor expediente.*

Solución.

Sea A el suceso "no se elige a ninguno de los dos estudiantes con mejor expediente"

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{C_{3,2}}{C_{5,2}} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

donde hemos aplicado la regla de Laplace para calcular $P(A)$.

Ejercicio 2 *(1.5 puntos) Cada CD producido por una compañía es defectuoso con una probabilidad igual a 0.05, independientemente de un CD a otro. La compañía vende los CDs en paquetes de 10 y ofrece una garantía de devolución del dinero si algún CD del paquete resulta defectuoso. Si todos los compradores ejercieran la garantía,*

(a) *¿Cuál es la probabilidad de que un paquete sea devuelto?*

Solución.

Sea X la variable aleatoria "número de CDs defectuosos de un paquete"

$$X \sim \text{Bin}(n = 10, p = 0.05)$$

$$P(X = i) = \binom{10}{i} 0.05^i \cdot 0.95^{10-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.95^{10} \simeq 0.401$$

(b) *Si una persona compra tres paquetes, cual es la probabilidad de que exactamente devuelva uno de ellos.*

Solución.

Sea Y la variable aleatoria "número de paquetes devueltos de entre los 3".

$$Y \sim \text{Bin}(n = 3, p = 0.401)$$

$$P(Y = 1) = \binom{3}{1} \cdot 0.401 \cdot (1 - 0.401)^2 \simeq 0.431$$

Ejercicio 3 *(1.5 puntos) Si un usuario llega a la parada de un autobús, el tiempo, en minutos, que debe esperar si no hay retraso, es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo* $(0, 8)$. *Si el autobús lleva retraso, el tiempo de espera, en minutos, sigue una distribución exponencial de parámetro* 0.1.

El autobús llega con retraso uno de cada tres días .

(a) *Calcula la probabilidad de que el usuario tenga que esperar más de* 5 *minutos.*

Solución.

Sea T la variable aleatoria "tiempo de espera" y R el suceso "el autobús llega con retraso".

Aplicando el teorema de la probabilidad total

$$P(T > 5) = P(T > 5/\overline{R}) \cdot P(\overline{R}) + P(T > 5/R) \cdot P(R)$$

Calculando

$$P(T > 5/R) = \int_5^\infty 0.1e^{-0.1x}\, dx = e^{-1/2}$$

$$P(T > 5/\overline{R}) = \int_5^8 \frac{1}{8}\, dx = \frac{3}{8}$$

Resulta finalmente

$$P(T > 5) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} + e^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{3} \simeq 0.4521$$

(b) *Si un usuario ha tenido que esperar menos de* 5 *minutos, ¿cuál es la probabilidad de que el autobús haya tenido retraso?*

Solución.

Aplicando el teorema de Bayes

$$P(R/T < 5) = \frac{P(T < 5/R) \cdot P(R)}{P(T < 5)} = \frac{(1 - e^{-1/2}) \cdot \frac{1}{3}}{1 - 0.4521} \simeq 0.239$$

Ejercicio 4 *(1 punto) Sea* X *una variable aleatoria que toma el valor* 0 *con probabilidad* $\frac{1}{3}$ *y el valor* 1 *con probabilidad* $\frac{2}{3}$. *Sea* Y *otra variable aleatoria independiente de* X, *que toma los valores* $0, 1$ *y* 2 *con probabilidades* $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ *y* $\frac{1}{4}$, *respectivamente.*

Construimos la variable aleatoria Z, *a partir de* X *e* Y, *de la siguiente manera:*

$Z = 0$ *si* X *o* Y *o ambos son iguales a cero,*
$Z = 1$ *si* X *e* Y *son iguales a uno,*
$Z = 2$ *en los demás casos.*

(a) *Calcula la función de probabilidad de Z.*

Solución.

$$\begin{aligned}
P(Z=0) =& P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=0)\\
=& P(X=0)P(Y=0)+P(X=0)P(Y=1)+P(X=0)P(Y=2)+P(X=1,Y=0)=\frac{1}{2}\\
P(Z=1) =& P(X=1,Y=1)=P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{3}\\
P(Z=2) =& 1-(P(Z=0)+P(Z=1))=\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

(b) *Calcula la media y desviación típica de X.*

Solución.

$$\begin{aligned}
E[X] =& 0\cdot P(X=0)+1\cdot P(X=1)=\frac{2}{3}\\
E[X^2] =& 0^2\cdot P(X=0)+1^2\cdot P(X=1)=\frac{2}{3}\\
\mathrm{VAR}(X) =& E[X^2]-(E[X])^2=\frac{2}{9}\Rightarrow \sigma=\sqrt{\mathrm{VAR}(Z)}=\frac{\sqrt{2}}{3}\simeq 0.4714
\end{aligned}$$

Ejercicio 5 *(1.5 puntos) Sean X e Y variables aleatorias con función de densidad conjunta*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{5}(x^2+2xy) & 0<x<1,\ 0<y<1\\ 0 & \textit{en otro caso}\end{cases}$$

(a) *Calcula $E(XY)$.*

Solución.

$$E(XY)=\iint_{[0,1]\times[0,1]} xyf(x,y)\,dxdy=\frac{6}{5}\int_0^1\Big(\int_0^1 xy(x^2+2xy)\,dy\Big)\,dx=\frac{6}{5}\int_0^1\Big(\frac{x^3}{2}+\frac{2x^2}{3}\Big)\,dx=\frac{5}{12}$$

(b) *Calcula las marginales.*

Solución.

$$f_X(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\frac{6}{5}(x^2+2xy)\,dy=\frac{6}{5}(x^2+x) & 0<x<1\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1\frac{6}{5}(x^2+2xy)\,dx=\frac{2}{5}(1+3y) & 0<y<1\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

(c) *Calcula la probabilidad del suceso $(X\le Y)$.*

Solución.

$$\begin{aligned}
P(X\le Y)=&\int_0^1\Big(\int_x^1\frac{6}{5}(x^2+2xy)\,dy\Big)\,dx\\
=&\int_0^1\Big(\frac{6}{5}x^2(1-x)+\frac{12}{5}x\Big(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\Big)\Big)\,dx\\
=&\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Ejercicio 6 *(1.5 puntos) Los datos acumulados indican que el nivel de acidez media (pH) de la lluvia en una determinada región industrial es 5.2. Para contrastar si se ha producido recientemente algún cambio se midieron los niveles de acidez de 12 tormentas de lluvia del pasado año y se obtuvieron los siguientes valores de la media y cuasidesviación típica* $\overline{x} = 5.667$ *y* $s_1 = 0.921$.

(a) *Calcula el p-valor del contraste:*

$H_0 : \mu = 5.2$

$H_1 : \mu \neq 5.2$

(b) *¿Son estos datos suficientemente significativos para concluir con un nivel de significación del 5 % que la acidez media de la lluvia ha cambiado?*

Nota: *Sea X una variable aleatoria con distribución t de Student con 11 grados de libertad. La siguiente tabla muestra los valores de su función de distribución en diferentes abscisas*

x	*0*	*0.7*	*0.9*	*0.95*	*1.76*	*2.20*
$P(X \leq x)$	*0.5*	*0.75*	*0.81*	*0.819*	*0.92*	*0.975*

Solución.

(a) $H_0 : \mu = 5.2$

$H_1 : \mu \neq 5.2$

Si H_0 es cierta, el estadístico $T = \dfrac{\overline{X} - 5.2}{S_1/\sqrt{12}}$ sigue una distribución t de Student con 11 grados de libertad.

El valor de T en la muestra es

$$\frac{5.667 - 5.2}{0.921/\sqrt{12}} = 1.76$$

$$\text{p-valor} = 2 \cdot P(t_{11} > 1.76) = 2 \cdot 0.08 = 0.16$$

(b) Se acepta la hipótesis nula para cualquier nivel de significación $\alpha < 0.16$.

En particular se acepta, con un nivel de significación del 5 %, que la acidez media no ha cambiado.

Ejercicio 7 *(2 puntos) Sea $X(t)$ un proceso estacionario normal con media 0 y autocorrelación $R_X(\tau) = \frac{1}{1+\tau^2}$. Sean $Y(t) = AX(t)$ donde A es una variable aleatoria independiente de $X(t)$ y verificando $P(A = 0) = P(A = 2) = 1/2$.*

(a) *Calcula $P(X(1) + X(2) \leq 1)$.*

Solución. Como $[X(1), X(2)]$ es una variable aleatoria con distribución normal, $X(1)+X(2)$ es una variable aleatoria de distribución normal de media $E[X(1)+X(2)] = E[X(1)]+E[X(2)] = 0$ y varianza

$$\text{VAR}[X(1)+X(2)] = \text{VAR}[X(1)]+\text{VAR}[X(2)]+2\text{COV}[X(1), X(2)] = R_X(0)+R_X(0)+2R_X(1) = 3$$

Entonces

$$P(X(1) + X(2) \leq 1) = P\Big(\frac{X(1) + X(2)}{\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\Big) = \Phi\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}\Big)$$

(b) *Calcula la autocorrelación de* $Y(t)$.

Solución. $R_Y(\tau) = E[AX(t)AX(t+\tau)] = E[A^2]E[X(t)X(t+\tau)] = 2R_X(\tau) = \frac{2}{1+\tau^2}$

(c) *Suponiendo* $A = 2$, *calcula la distribución del vector aleatorio* $[Y(2),\ Y(7)]$.

Solución.

Suponiendo $A = 2$ se verifica que

$$\begin{pmatrix} Y(2) \\ Y(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2X(2) \\ 2X(7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(2) \\ X(7) \end{pmatrix}$$

Sabemos que $X(t)$ es un proceso normal estacionario con

$$E[X(t)] = 0, \quad \mathrm{VAR}[X(t)] = 1 \quad \text{y} \quad \mathrm{COV}(X(2), X(7)) = R_X(5) - E[X(t)]^2 = 1/26$$

De manera que si $\overline{\mu}$ es el vector de medias y M la matriz de covarianzas

$$\begin{pmatrix} X(2) \\ X(7) \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\overline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 1 & 1/26 \\ 1/26 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

Entonces,

$$\begin{pmatrix} Y(2)) \\ Y(7) \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\overline{\mu'}, M' \right)$$

siendo

$$\overline{\mu'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/26 \\ 1/26 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2/13 \\ 2/13 & 4 \end{pmatrix}$$

(d) *Calcula* $P(X(1) + X(2) \leq A)$.

Indicación: utiliza el Teorema de la probabilidad total

Solución. $P(X(1) + X(2) \leq A) = P(A = 0)P(X(1) + X(2) \leq A/A = 0) + P(A = 1)P(X(1) + X(2) \leq A/A = 2) = \frac{1}{2}P(X(1) + X(2) \leq 0) + \frac{1}{2}P(X(1) + X(2) \leq 2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$