ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
FINAL (Convocatoria de Julio 2014) **Duración:** 2 horas 30'
FECHA: 26 de Junio de 2014
Fecha publicación notas: 3-07-2014 **Fecha revisión examen:** 7-07-2014
APELLIDOS Y NOMBRE:
DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *(1 punto)*

Se lanza un par de dados 80 veces. Calcula la probabilidad de que, al menos dos veces, la suma de ambas puntuaciones sea 3 ó 4.

Solución.

Sea X la variable aleatoria "número de veces que las puntuaciones suman 3 ó 4 en 80 lanzamientos de un par de dados".

$$X \sim Bin(n = 80, p)$$

$$p = P(\{(1,2),(2,1),(2,2)(3,1),(1,3)\}) = 5/36$$

$$P(X = i) = \binom{80}{i}\left(\frac{5}{36}\right)^i\left(\frac{31}{36}\right)^{80-i} \qquad i = 0,\dots,80.$$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) =& 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\ =& 1 - \left[\left(\frac{31}{36}\right)^{80} + 80\cdot\frac{5}{36}\cdot\left(\frac{31}{36}\right)^{79}\right] = 0.99991 \end{aligned}$$

Ejercicio 2 *(1 punto)*

Se sabe que la probabilidad de que una determinada máquina fabrique una pieza defectuosa es 0.0001. En un año se fabrican 20000 piezas.

Una variable aleatoria binomial de parámetros n y p se puede aproximar por una Poisson de parámetro $\lambda = np$, cuando n es grande y p pequeño. Utilizando la aproximación indicada, ¿cuál es la probabilidad de que el número de piezas defectuosas producidas en un año sea mayor que 2?

Solución.

Sea X la variable aleatoria "número de piezas defectuosas fabricadas en un año".

$X \sim Bin(n = 20000, p = 0.0001)$

Como se dan las condiciones que exige el enunciado,

$$X \overset{aprox}{\sim} Pois(\lambda = 2)$$

$$P(X > 2) = \sum_{i=3}^{+\infty} P(X = i) = 1 - \sum_{i=0}^{2} P(X = i) = 1 - \sum_{i=0}^{2} e^{-2}\frac{2^i}{i!} = 1 - e^{-2}(1+2+2) = 1 - 5e^{-2} \approx 0.323$$

Ejercicio 3 *(1 punto)*

El tiempo de vida en horas de un componente es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} 2\lambda t e^{-\lambda t^2} & \textit{si } t > 0 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

Se sabe que el 88 % de los componentes que ya han durado 90 horas, fallan antes de las 100 horas. Determina el valor del parámetro λ, siendo $\lambda > 0$.

Solución.

Sea T la variable aleatoria "tiempo de vida en horas de un componente".

$$0.88 = P(T < 100/T > 90) = \frac{P(90 < T < 100)}{P(T > 90)}$$

$$P(90 < T < 100) = \int_{90}^{100} 2\lambda t e^{-\lambda t^2}\, dt = -e^{-\lambda t^2}\Big|_{90}^{100} = e^{-90^2\lambda} - e^{-100^2\lambda}$$

$$P(T > 90) = \int_{90}^{+\infty} 2\lambda t e^{-\lambda t^2}\, dt = -e^{-\lambda t^2}\Big|_{90}^{+\infty} = e^{-90^2\lambda}$$

$$0.88 = \frac{e^{-90^2\lambda} - e^{-100^2\lambda}}{e^{-90^2\lambda}} = 1 - e^{-1900\lambda}$$

$$-1900\lambda = \ln(0.12) \Rightarrow \lambda = 0.0011159$$

Ejercicio 4 *(1 punto)*

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad no nula en el intervalo $(0, 1)$. Si $P(X \leq 0.29) = 0.75$, determina el valor del primer cuartil de la variable aleatoria $Y = 1 - X$.

Solución.

$$0.25 = P(Y \leq q_{0.25}) = P(1 - X \leq q_{0.25}) = P(X \geq 1 - q_{0.25}) = 1 - P(X \leq 1 - q_{0.25})$$

Luego,

$$1 - q_{0.25} = 0.29 \Rightarrow q_{0.25} = 0.71$$

Ejercicio 5 *(1 punto)*

La entrada a un sistema de comunicación es un voltaje constante $V > 0$ *. La salida es una variable aleatoria* $Y = \dfrac{V}{2} + N$*, donde* N *es un ruido que sigue una distribución normal de media 0 y varianza 4.*

a) *Halla la media y la varianza de* Y*.*

Solución.

$$E(Y) = \frac{V}{2} + E(N) = \frac{V}{2}, \qquad Var(Y) = Var(N) = 4$$

b) *Calcula la covarianza entre* Y *y* N*.*

Solución.

$$\begin{aligned} Cov(Y, N) =& E(Y \cdot N) - E(Y)E(N) = E\left(\frac{V}{2} \cdot N + N^2\right) \\ =& \frac{V}{2} \cdot E(N) + E(N^2) = Var(N) - [E(N)]^2 = 4 \end{aligned}$$

c) *Halla el valor del voltaje* V *que verifica* $P(Y < 0) = 0.04$.

Solución.

$$0.04 = P(Y < 0) = P\left(\frac{V}{2} + N < 0\right) = P\left(N < -\frac{V}{2}\right) = P\left(Z < -\frac{V}{4}\right) = F_Z\left(-\frac{V}{4}\right) = 1 - F_Z\left(\frac{V}{4}\right)$$

$$F_Z\left(\frac{V}{4}\right) = 0.96 \Rightarrow \frac{V}{4} = 1.76 \Rightarrow V = 7.04$$

Ejercicio 6 *(1.5 puntos) Sea (X, Y) una variable bidimensional continua con función de densidad conjunta*

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1-x \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

Calcula:

a) Las funciones de densidad marginales de X e Y ¿ Tienen X e Y la misma distribución?

Solución.

$$\begin{aligned} f_X(x) = & \int_0^{1-x} 24xy\, dy = 24x \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{1-x} \\ = & 12x(1-x)^2 \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) = & \int_0^{1-y} 24xy\, dx = 24y \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{1-y} \\ = & 12y(1-y)^2 \quad 0 < y < 1 \end{aligned}$$

Luego X e Y tienen la misma distribución.

b) $E[X + 2Y + 1]$.

Solución.

$$E[X + 2Y + 1] = E[X] + 2E[Y] + 1$$

$$\begin{aligned} E[X] = & \int_0^1 x \cdot 12x(1-x)^2\, dx = 12 \int_0^1 x^2(1 + x^2 - 2x)\, dx \\ = & 12\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Luego

$$E[X + 2Y + 1] = \frac{2}{5} + 2 \cdot \frac{2}{5} + 1 = \frac{11}{5}$$

c) La probabilidad del suceso $P(X + Y < 0.5)$.

Solución.

$$\begin{aligned} P(X + Y < 0.5) = & \int_0^{\frac{1}{2}} 24x \left(\int_0^{\frac{1}{2}-x} y\, dy\right) dx \\ = & \int_0^{\frac{1}{2}} 24x \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\frac{1}{2}-x} dx \\ = & 12 \int_0^{\frac{1}{2}} x \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 dx = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Ejercicio 7 *(1.5 puntos)*

Para estudiar la vida útil de unas pilas que se van a lanzar al mercado, se examina la duración de 40 de ellas, resultando una vida media de 63.5 *horas. Suponiendo que el tiempo de vida de las pilas sigue una distribución normal con varianza* $\sigma^2 = 38.44$

a) Calcula un intervalo de confianza al 95 % *para la duración media de las pilas.*

Solución.

Sabemos que

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$P\left(-q_{0.975} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq q_{0.975}\right) = 0.95$$

$$P\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot q_{0.975} \leq \mu \leq \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot q_{0.975}\right) = 0.95$$

El cuantil de orden 0.975 de una $N(0,1)$ es $q_{0.975} = 1.96$

Entonces, un intervalo de confianza al 95 % para μ es

$$\left(\overline{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot q_{0.975},\ \overline{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot q_{0.975}\right) = \left(63.5 - \sqrt{\frac{38.44}{40}} \cdot 1.96,\ 63.5 + \sqrt{\frac{38.44}{40}} \cdot 1.96\right) = (61.57, 65.42)$$

b) ¿Cuál debe ser mínimo tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo sea menor que 1?

Solución.

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \cdot q_{0.975} < 1$$

$$\frac{2\sqrt{38.44}}{\sqrt{n}} \cdot 1.96 < 1 \Rightarrow \sqrt{n} > 2\sqrt{38.44} \cdot 1.96 \Rightarrow n > 590.68 \Rightarrow n \geq 591$$

Ejercicio 8 *(2 puntos)*

Dado el siguiente proceso estocástico:

$$X(t) = A + Bt$$

donde A y B son dos variables aleatorias independientes con distribución $N(\mu = 1, \sigma^2 = 2)$.

Calcula:

a) $E[X(t)]$, $\mathrm{VAR}(X(t))$ *y la función de autocorrelación del proceso* $X(t)$.

Solución.

$$E[X(t)] = E[A] + tE[B] = 1 + t$$

$$\mathrm{VAR}[X(t)] = \mathrm{VAR}(A) + t^2\,\mathrm{VAR}(B) + 2t\,\mathrm{COV}(A,B) = 2 + t^2 2 + 2t0 = 2(1+t^2)$$

$$\begin{aligned} R_X(t_1,t_2) =& E[X(t_1)X(t_2)] = E[(A+Bt_1)(A+Bt_2)] \\ =& E[A^2 + ABt_1 + ABt_2 + B^2 t_1 t_2] \\ =& 3 + 3t_1t_2 + t_2 + t_1 \end{aligned}$$

Hemos utilizado que $\mathrm{COV}(A,B) = 0$ y que $E[AB] = E[A]E[B]$ pues A y B son v.a.independientes.

b) La distribución de primer orden de $X(t)$.

Solución.

Como A y B son variables aleatorias normales independientes resulta que (A,B) sigue una distribución normal bidimensional de vector de medias $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y matriz de covarianzas $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Como $X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, resulta que $X(t)$ sigue una normal con media $1+t$ y varianza $2(1+t^2)$

c) La distribución de la variable aleatoria bidimensional $(X(\mathrm{e}),\ 2X(\mathrm{e}) - 3X(\pi) + 2)$.

Solución.

$$\begin{pmatrix} X(\mathrm{e}) \\ X(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} \\ 1 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$$

Por lo que $(X(\mathrm{e}),\ X(\pi))$ sigue una distribución normal bidimensional de vector de medias y matriz de covarianzas, respectivamente $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} \\ 1 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{e} \\ 1+\pi \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e} \\ 1 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \mathrm{e} & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\mathrm{e}^2 & 2+2\mathrm{e}\pi \\ 2+2\mathrm{e}\pi & 2+2\pi^2 \end{pmatrix}$$

Finalmente

$$\begin{pmatrix} X(\mathrm{e}) \\ 2X(\mathrm{e}) - 3X(\pi) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(\mathrm{e}) \\ X(\pi) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo que $(X(\mathrm{e}),\ 2X(\mathrm{e}) - 3X(\pi) + 2)$ sigue una distribución normal bidimensional de vector de medias μ

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{e} \\ 1+\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{e} \\ 1+2\mathrm{e}-3\pi \end{pmatrix}$$

y matriz de covarianzas M

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+2\mathrm{e}^2 & 2+2\mathrm{e}\pi \\ 2+2\mathrm{e}\pi & 2+2\pi^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2\mathrm{e}^2 & -2+4\mathrm{e}^2-6\mathrm{e}\pi \\ -2+4\mathrm{e}^2-6\mathrm{e}\pi & 2+8\mathrm{e}^2+18\pi^2-24\mathrm{e}\pi \end{pmatrix}$$