ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
EXAMEN FINAL (Primavera 2017-18) **Duración:** 3 horas
FECHA: 31 de Mayo de 2018
Fecha publicación notas: 5 de Junio de 2018
Fecha revisión examen: 11 de Junio de 2018
EXAMEN RESUELTO

Ejercicio 1 *(1.6 puntos) Se tienen tres urnas U_1, U_2 y U_3 con las siguientes composiciones:*
U_1 contiene 3 bolas blancas y 1 negra.
U_2 contiene 2 bolas blancas y 2 negras.
U_3 contiene 1 bola blanca y 3 negras.
Se elige al azar una urna y se extrae de ella una bola al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída sea blanca?

Solución.

Sean los sucesos U_i: "La bola se extrae de la urna i", $i = 1, 2, 3$.

$P(U_i) = \frac{1}{3}$, $i = 1, 2, 3$.

Sea B el suceso "la bola extraída es blanca"

Utilizando el Teorema de la Probabilidad Total

$$P(B) = P(B/U_1)P(U_1) + P(B/U_2)P(U_2) + P(B/U_3)P(U_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

Como es igual de probable elegir cualquiera de las tres urnas, y las tres urnas tienen el mismo número de bolas, esa probabilidad coincide con la de elegir una bola blanca en una urna que contiene 6 bolas blancas y 6 bolas negras.

b) Si sabemos que la bola extraída ha sido blanca, ¿qué probabilidad hay de haber elegido la urna U_1?

Solución.

Según el Teorema de Bayes

$$P(U_1/B) = \frac{P(B/U_1)P(U_1)}{P(B)} = \frac{1/4}{P(B)} = \frac{1}{2}$$

Supongamos ahora que se elige una urna al azar pero que, en lugar de una, se extraen dos bolas sin remplazamiento de la misma urna.

c) Si las dos bolas elegidas son blancas, ¿qué probabilidad hay de haber elegido la urna U_1?

Solución.

Sea C el suceso "las dos bolas extraídas son blancas"

$$P(C) = P(C/U_1)P(U_1) + P(C/U_2)P(U_2) + P(C/U_3)P(U_3) = \frac{C_{3,2}}{C_{4,2}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{C_{4,2}} \cdot \frac{1}{3} + 0 = \frac{2}{9}$$

$$P(U_1/C) = \frac{P(C/U_1)P(U_1)}{P(C)} = \frac{\frac{C_{3,2}}{C_{4,2}} \cdot \frac{1}{3}}{P(C)} = \frac{3}{4}$$

d) *Calcula el número medio de bolas blancas extraídas.*

Solución.

Sea X la variable aleatoria "número de bolas blancas extraídas"

X toma los valores 0,1 y 2.

$$P(X=2) = P(C) = \frac{2}{9}$$

Sea D el suceso "las dos bolas extraídas son negras"

$$P(X=0) = P(D) = P(D/U_1)P(U_1)+P(D/U_2)P(U_2)+P(D/U_3)P(U_3) = 0+\frac{1}{C_{4,2}}\cdot\frac{1}{3}+\frac{C_{3,2}}{C_{4,2}}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$P(X=1) = 1 - [P(X=0)+P(X=2)] = \frac{5}{9}$$

$$E(X) = 1\cdot\frac{5}{9}+2\cdot\frac{2}{9} = 1$$

Ejercicio 2 *(0.8 puntos) Una persona tiene una probabilidad* 0.8 *de escribir a mano una página sin errores. Se necesita que escriba un documento de 10 páginas.*

a) *Calcula la probabilidad de que haya más de 7 páginas sin errores en el documento.*

Solución. Sea X la variable aleatoria "número de páginas sin errores del documento".

$$X \sim Bin(n=10, p=0.8), \quad P(X=i) = \binom{10}{i} 0.8^i \cdot 0.2^{10-i}, \quad i = 0,1,\ldots 10$$

$$P(X>7) = \sum_{i=8}^{10} P(X=i) = \binom{10}{8}0.8^8\cdot 0.2^2 + \binom{10}{9}0.8^9\cdot 0.2 + \binom{10}{10}\cdot 0.2^{10} = 0.678$$

b) *Si el número de errores por página sigue una distribución de Poisson, ¿cuál es el número medio de errores por página? ¿cuál es la probabilidad de que una página tenga más de 4 errores?*

Solución. Sea Y la variable aleatoria "número de errores por página".

$$Y \sim Pois(\lambda), \quad P(Y=i) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

Como sabemos que $0.8 = P(Y=0) = e^{-\lambda}$, será $\lambda = -\ln(0.8) = 0.22$

$$E(Y) = \lambda = 0.22$$

$$P(Y>4) = 1 - P(Y\le 3) = 1 - \sum_{i=0}^{3} P(Y=i) = 1 - e^{-\lambda}\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2!}+\frac{\lambda^3}{3!}\right) = 0.000086$$

Ejercicio 3 *(1.5 puntos) Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{9} & si \quad 0 < x < 3 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Sea $Y = X^3$

a) Calcula la función de distribución de X.

Solución.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} & x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \frac{t^2}{9}\, dt = \frac{x^3}{27} & \text{si} & 0 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} & x \geq 3 \end{cases}$$

b) Calcula el cuantil de orden 0.3 *de X.*

Solución. Buscamos un valor $q_{0.3}$ que verifique $P(X \leq q_{0.3}) = 0.3$

Debe ser

$$0 < q_{0.3} < 3$$

por tanto

$$0.3 = F_X(q_{0.3}) = \frac{q_{0.3}^3}{27} \Rightarrow q_{0.3} = \sqrt[3]{8.1}$$

c) Calcula $E(Y)$ y $Var(Y)$.

Solución.

$$E(Y) = E(X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3\, f(x)\, dx = \int_0^3 \frac{x^5}{9}\, dx = \frac{27}{2}$$

$$Var(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = E(X^6) - \frac{27^2}{4} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^6 f(x)\, dx - \frac{27^2}{4} = \int_0^3 \frac{x^8}{9}\, dx - \frac{27^2}{4} = 3^5 \frac{27^2}{4} = \frac{243}{4}$$

d) Calcula $P(Y > 10)$.

Solución.

$$P(Y > 10) = P(X^3 > 10) = P(X > \sqrt[3]{10}) = \int_{\sqrt[3]{10}}^3 \frac{x^2}{9}\, dx = 1 - \frac{10}{27} = \frac{17}{27}$$

Ejercicio 4 *(1.6 puntos) Se eligen de forma independiente dos números. El primero de ellos X es un número positivo con distribución exponencial de parámetro 3 y el segundo Y sigue una distribución uniforme en el intervalo* $(0, 1)$*.*

a) Determina la función de densidad conjunta de (X, Y).

Solución.

$$f_X(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}, \qquad f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \in (0,1) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Por ser X e Y independientes,

$$f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} 3e^{-3x} & \text{si } \ x > 0, \ y \in (0,1) \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) Calcula la probabilidad de que ambos sean mayores que 1/2.

Solución.

Por ser X e Y independientes

$$P(X > 1/2,\ Y > 1/2) = P(X > 1/2)P(Y > 1/2) = \left(\int_{1/2}^{+\infty} 3e^{-3x}\ dx \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^{-3x} \Big|_{1/2}^{+\infty} = \frac{e^{-3/2}}{2} = 0.11$$

c) Calcula la probabilidad de que la suma de ambos sea menor que 2.

Solución.

$$P(X + Y < 2) = \int_0^1 dy \int_0^{2-y} 3e^{-3x}\ dx$$

$$\int_0^{2-y} 3e^{-3x}\ dx = 1 - e^{-6} \cdot e^{3y}$$

$$P(X + Y < 2) = \int_0^1 (1 - e^{-6} \cdot e^{3y})\ dy = 1 - \frac{1}{3}(e^{-3} - e^{-6}) = 0.98$$

d) Calcula $E(X \cdot Y)$ y $Var(X - Y)$.

Solución.

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y) = Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{7}{36}$$

Ejercicio 5 *(1.5 puntos) Sean X_1, X_2 y X_3 tres variables aleatorias independientes, cada una de ellas con distribución $N(0,1)$.*

a) *Determina la distribución del vector aleatorio (X_1, X_2, X_3).*

Solución. Por ser $X_1, \ldots X_n$ normales independientes, su distribución conjunta es normal

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

b) *Calcula $P(\text{mín}\{X_1, X_2, X_3\} > 1)$.*

Solución.

Por ser $X_1, \ldots X_n$ variables aleatorias independientes

$$\begin{aligned} P(min\{X_1, X_2, X_3\} > 1) &= P(X_1 > 1, X_2 > 1, X_3 > 1) = [P(X_1 > 1)]^3 \\ &= [1 - \Phi(1)]^3 = (1 - 0.84134)^3 = 0.00399 \end{aligned}$$

c) *Calcula $Var(2X_1 + 3X_3)$.*

Solución.

$Var(2X_1 + 3X_3) = 4Var(X_1) + 9Var(X_3) = 13$

d) *Calcula el vector de medias y la matriz de covarianzas del vector aleatorio $(X_1 + X_3, X_2 + 2X_1)$. ¿Son $X_1 + X_3$ y $X_2 + 2X_1$ independientes? Justifica la respuesta.*

Solución.

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_3 \\ X_2 + 2X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_3 \\ X_2 + 2X_1 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Esto es,

$$\begin{pmatrix} X_1 + X_3 \\ X_2 + 2X_1 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}\right)$$

$X_1 + X_3$ y $X_2 + 2X_1$ no son independientes ya que $Cov(X_1 + X_3, X_2 + 2X_1) = 2 \neq 0$.

Ejercicio 6 *(0.5 puntos) Obtén un intervalo con un nivel de confianza del $98\,\%$ para el parámetro θ de una determinada distribución de probabilidad si se sabe que el estadístico $\dfrac{(n-4)\cdot\theta}{S_1} \sim t_{n-3}$ y que, en una muestra de tamaño $n = 20$, el valor de la cuasidesviación típica muestral es $s_1 = 2.5$.*

Solución. Sabemos que el estadístico $\dfrac{16\cdot\theta}{S_1}$ sigue una distribución t de student con 17 grados de libertad. Entonces,

$$0.98 = P\left(-q_{0.99} \leq \frac{16\cdot\theta}{S_1} \leq q_{0.99}\right) = P\left(-\frac{S_1\cdot q_{0.99}}{16} \leq \theta \leq \frac{S_1\cdot q_{0.99}}{16}\right)$$

El cuantil de orden 0.99 de una distribución t_{17} es $q_{0.99} = 2.5669$

Un intervalo de confianza al 98 % para θ es

$$\left(-\frac{s_1\cdot q_{0.99}}{16},\ \frac{s_1\cdot q_{0.99}}{16}\right) = \left(-\frac{2.5\cdot 2.5669}{16},\ \frac{2.5\cdot 2.5669}{16}\right) = (-0.401, 0.401)$$

Ejercicio 7 *(0.8 puntos) Se selecciona aleatoriamente una muestra de tamaño 100 de una población normal.*

a) Se sabe que la población tiene media μ y varianza $\sigma^2 = 4$ y se quiere contrastar la hipótesis nula $H_0 : \mu = 3$ frente a la hipótesis alternativa $H_1 : \mu \neq 3$. Si se considera un nivel de significación $\alpha = 0.05$, ¿cuál es la región de rechazo de la hipótesis nula?

Solución.

$H_0 : \mu = 3$

$H_1 : \mu \neq 3$.

Si H_0 es cierta,

$$T = \frac{\overline{X} - 3}{2/\sqrt{100}} \sim N(0,1)$$

Sea t el valor del estadístico T en la muestra obtenida.

Se rechaza la hipótesis nula si $t \notin (q_{0.025},\ q_{0.975})$

$(q_{0.025},\ q_{0.975}) = (-q_{0.975},\ q_{0.975}) = (-1.96,\ 1.96)$

Es decir se rechaza H_0 si $t < -1.96$ o bien $t > 1.96$

b) Supongamos que el valor de la media de los 100 valores es 3.7. ¿Cuál es el p-valor del contraste? ¿Se debería rechazar $H_0 : \mu = 3$ con el nivel de significación especificado en el apartado anterior?

Solución.

El valor de T en la muestra es $5(\overline{x} - 3) = 5(3.7 - 3) = 3.5$.

Para ese nivel de significación se rechaza H_0 pues $3.5 > 1.96$.

p-valor $= 2P(Z > 3.5) = 2[1 - \Phi(3.5)] = 2(1 - 0.99977) = 0.00046 < 0.05$.

Ejercicio 8 *(0.5 puntos) Dado el proceso aleatorio $X(t) = A\cos t + (B+1)\operatorname{sen} t$, donde A y B son variables aleatorias independientes tales que $E(A) = E(B) = 0, \quad E(A^2) = E(B^2) = 1$.*
Calcula la media y la función de autocorrelación de $X(t)$. ¿Es $X(t)$ E.S.A.?

Solución.

$$E[X(t)] = E[A\cos t + (B+1)\,\mathrm{sen}\,t] = \cos t \cdot E(A) + \mathrm{sen}\,t \cdot E(B+1) = \mathrm{sen}\,t$$

$E[X(t)]$ no es constante por lo que $X(t)$ no es estacionario en sentido amplio.

$$R_X(t, t+\tau) = E([X(t)][X(t+\tau)]) = E[(A\cos t + (B+1)\,\mathrm{sen}\,t)(A\cos(t+\tau) + (B+1)\,\mathrm{sen}(t+\tau))]$$

$$= \cos t\cos(t+\tau)E[(A^2)] + \cos t\,\mathrm{sen}(t+\tau)E[A(B+1)] + \mathrm{sen}\,t\cos(t+\tau)E[(A(B+1)] + \mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}(t+\tau)E[(B+1)^2]$$

$$E[(B+1)^2] = E(B^2 + 2B + 1) = E(B^2) + 2E(B) + 1 = 1 + 1 = 2$$

Por ser A y B independientes, $E[A(B+1)] = E(A)E(B+1) = 0$

$$R_X(t, t+\tau) = \cos t\cos(t+\tau) + 2\,\mathrm{sen}\,t\,\mathrm{sen}(t+\tau)$$

Ejercicio 9 *(1.2 puntos) El número de averías que se producen en una máquina en el intervalo* $[0, t)$ *es un proceso de Poisson de tasa 2 averías por semana.*

a) Calcula la probabilidad de que no haya ninguna avería en una semana.

Solución. Para cada valor de t, $N(t) \sim Pois(2t)$

$N(1) \sim Pois(2), \quad P[N(1) = i] = e^{-2}\,\dfrac{2^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$

$P[N(1) = 0] = e^{-2} = 0.135$

b) Calcula la probabilidad de que se produzcan menos de 3 averías en cuatro semanas.

Solución.

$N(4) \sim Pois(8), \quad P[N(4) = i] = e^{-8}\,\dfrac{8^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$

$P[N(4) < 3] = P(N = 0) + P(N = 1) + P(N = 2) = e^{-8}\left(1 + 8 + \dfrac{8^2}{2!}\right) = 41e^{-8} = 0.01375$

c) Calcula la probabilidad de que se produzcan 3 o menos averías en las tres primeras semanas si en la primera semana se ha producido una o ninguna avería (menos de 2).

Solución.

$$\begin{aligned}
P[N(3) \le 3 \;/\; N(1) < 2] &= \frac{P[(N(3) \le 3) \cap (N(1) < 2)]}{P[N(1) < 2]} \\
&= \frac{P[N(3) \le 3, N(1) = 0] + P[N(3) \le 3, N(1) = 1]}{P[N(1) < 2]} \\
&= \frac{P[N(3) - N(1) \le 3]P[(N(1) = 0)] + P[N(3) - N(1) \le 2]P[N(1) = 1]}{P[N(1) < 2]} \\
&= \frac{\frac{149}{3}e^{-6}}{3e^{-2}} = \frac{149}{9}e^{-4}
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $N(1)$ y $N(3) - N(1)$ son variables aleatorias independientes, que $N(3) - N(1)$ tienen igual distribución que $N(2)$, que $N(1) \sim Pois(2)$ y que $N(2) \sim Pois(4)$.