Asignatura: ÁLGEBRA LINEAL **Fecha:** 9 de Enero de 2014

Fecha publicación notas: 16 de Enero de 2014 **Fecha revisión examen:** 20 de Enero de 2014

Duración del examen: 2 horas y media

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: **Titulación:**

---

1. *(1 punto)* Encuentra el conjunto de soluciones de la ecuación vectorial

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución: La ecuación vectorial tiene las mismas soluciones que el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & | & 0 \end{bmatrix}$$

el sistema es equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 =& - x_2 + x_4 + x_5 \\ x_3 =& x_4 + x_5 \end{aligned}$$

Podemos pues expresar el conjunto de soluciones en la forma paramétrica

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

donde los parámetros son las variables libres x_2, x_4, x_5. Nótese que el conjunto de soluciones del sistema es un subespacio vectorial de dimensión 3, y que una base de este espacio esta formada por los vectores

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. *(1,5 puntos: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y −0,1 por cada respuesta errónea)* Sean: A una matriz 9×9 no singular (invertible), B una matriz 9×9 de rango 5, $\mathbf{b}$ un vector de $\mathbb{R}^9$ no nulo ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), T_A, T_B y T las transformaciones de $\mathbb{R}^9$ en $\mathbb{R}^9$ definidas por $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $T_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ y $T(\mathbf{x}) = T_B(T_A(\mathbf{x}))$. $\operatorname{Col} A$ y $\operatorname{Nul} A$ denotan respectivamente al espacio columna y al espacio nulo de la matriz A. Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean las matrices A y B y el vector $\mathbf{b}$. Por ejemplo, en la afirmación: "$\det A \neq 0$" se pondría S, en la afirmación: "$\det A = 0$" se pondría N, y en la afirmación: "$\det A = 3$", se pondría X ya que no siempre ocurre (pero podría ocurrir).

$\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^9$	S
$\dim \operatorname{Nul} B = 5$	N
T_A es inyectiva	S
La matriz A tiene una posición pivote en la última columna	S
$\dim \operatorname{Col} B = 9$	N
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones	N
El sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones	S
$T_B(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$	X
$\det AB = 0$	S
La matriz ampliada del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $[A \ \ \mathbf{b}]$ tiene rango 10	N
La matriz ampliada del sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $[B \ \ \mathbf{b}]$ tiene rango 6	X
La matriz de T es AB	X
T es suprayectiva	N
$\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\}$	S
$\det B = 0$	S

3. *(0,5 puntos)* Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2. Sea $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la transformación definida por

$$T\big(p(x)\big) = (x-1)p'(x), \quad p \in \mathbb{P}_2$$

Por ejemplo, $T(x^2) = (x-1)2x = 2x^2 - 2x$. Calcula la matriz de T con respecto a la base $\mathcal{E}$ (la $\mathcal{E}$-matriz de T)

Solución: Se tiene

$$T(1) = 0, \quad T(x) = x - 1, \quad T(x^2) = 2x^2 - 2x$$

Entonces la $\mathcal{E}$-matriz de T es

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

---

4. *(1 punto)* Sea $\mathcal{C}$ la base de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$. Sabiendo que la matriz de cambio de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$ es $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ calcula la base $\mathcal{B}$.

Solución: Denotemos $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Como $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ se tiene que

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}_3]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

Por tanto

$$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$$

5. *(0,5 puntos)* Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 2. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal cuya matriz respecto a la base $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ (la $\mathcal{E}$-matriz de T) es

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Calcula $T(-1 + x + 2x^2)$

Solución:

$$[T(-1+x+2x^2)]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} [-1+x+2x^2]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\5\\2\end{bmatrix}$$

Entonces

$$T(-1 + x + 2x^2) = 5x + 2x^2$$

6. *(2 puntos)* Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Un valor propio de A es $\lambda = 2$. Si A es diagonalizable encuentra una matriz P no singular y una matriz D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$. En otro caso explica por que A no es diagonalizable.

Solución:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^3 + 1 + 1 - 3(3-\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$$

Dividiendo por Ruffini $-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$ entre $\lambda - 2$ se obtiene

$$-\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20 = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 7\lambda + 10) = -(\lambda-2)^2(\lambda-5)$$

El espacio propio correspondiente al valor propio $\lambda = 2$ es el conjunto solución del sistema

$$(A-2I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

equivalentemente de $x + y + z = 0$. Una base de este espacio esta formada por $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ El espacio propio correspondiente al valor propio $\lambda = 5$ es el conjunto solución del sistema

$$(A-5I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

el sistema es equivalentemente a $x - z = 0$, $y - z = 0$. Una base de este espacio es $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Por tanto A es diagonalizable, concretamente $A = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

---

7. Sea $\mathbf{x} = (1,1,1)$. Sea W el subespacio de $I\!R^3$ generado por los vectores $(1,1,0)$ y $(1,-1,1)$.

a) *(0,5 puntos)* Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre W

Solución:

$$\mathrm{Proy}_W\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\cdot(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) + \frac{\mathbf{x}\cdot(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|^2}(1,-1,1) = \frac{2}{2}(1,1,0) + \frac{1}{3}(1,-1,1) = \Big(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\Big)$$

b) *(0,5 puntos)* Calcula la distancia de $\mathbf{x}$ a W

Solución:

$$\mathrm{Distancia}(W,\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathrm{Proy}_W\mathbf{x}\| = \Big\|\Big(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\Big)\Big\| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

c) *(1 punto)* Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre W, es decir la matriz A tal que

$$\mathrm{Proy}_W\,\mathbf{y} \;=\; A\,\mathbf{y}, \quad \text{para todo } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

y utilizando esta matriz calcula de nuevo $\mathrm{Proy}_W\mathbf{x}$

Solución: $\{(1,1,0)\,,\,(1,-1,1)\}$ es una base ortogonal de W. Normalizando obtenemos la base ortonormal $\Big\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\Big\}$. Entonces la matriz de la proyección ortogonal sobre W es

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

La proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre W es

$$\mathrm{Proy}_W\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

8. *(1 punto)* Calcula la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = \text{sen}(x)$$

Solución: La ecuación característica de la ecuación homogénea asociada es

$$k^2 - 5k + 6$$

cuyas raíces son $k = 2$ y $k = 3$ (ambas simples). Por tanto la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada es

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Teniendo en cuenta que j no es raíz de la ecuación característica, podemos asegurar que existe alguna solución a la ecuación del tipo

$$y = a\ \cos(x) + b\,\text{sen}\,(x)$$

Para tal y se tiene

$$\begin{aligned} y'' - 5y' + 6y &= \big[-a\ \cos(x) - b\,\text{sen}\,(x)\big] - 5\big[-a\,\text{sen}\ + b\ \cos(x)\big] + 6\big[a\ \cos(x) + b\,\text{sen}\,(x)\big] \\ &= (5a - 5b)\cos(x) + (5a + 5b)\text{sen}\,(x) \end{aligned}$$

y por tanto, para que sea solución se tiene que verificar que

$$\begin{cases} 5a - 5b = 0 \\ 5a + 5b = 1 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se obtiene $a = b = \frac{1}{10}$. Por tanto una solución particular de la ecuación $y'' - 5y' + 6y = \text{sen}(x)$ es $\frac{1}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\,\text{sen}\,(x)$. Entonces, la solución general es

$$y = \frac{1}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\text{sen}\,(x) + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

9. *(0,5 puntos)* Calcula la recta de mínimos cuadrados (recta de regresión) correspondiente a los datos $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$

Solución: La recta de regresión $y = \beta_0 + \beta_1 x$ se determina encontrando la solución mínimos cuadrados de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solución mínimos cuadrados es la solución de las ecuaciones normales

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Operando se obtiene $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ cuya solución es $\beta_0 = 7/6$, $\beta_1 = 1/2$. Por tanto la recta de regresión es

$$y = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}x$$