Asignatura: ÁLGEBRA LINEAL **Fecha del examen:** 11 de Enero de 2016

Fecha publicación notas: 19 de Enero de 2016 **Fecha revisión examen:** 22 de Enero de 2016

Duración del examen: 2 horas y 30 minutos

APELLIDOS:

NOMBRE:

Titulación:

---

1. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) *(0,5 puntos)* Calcula la matriz escalonada reducida de A. ¿Cuál es el rango de A?

Solución: Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

la matriz escalonada reducida de A es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$. El número de posiciones pivote de A es 3 y por tanto el rango de A es 3.

b) *(0,5 puntos)* Calcula la forma vectorial paramétrica de $\operatorname{Nul} A$ (espacio nulo de A), su dimensión y una base.

Solución: $\operatorname{Nul} A$ es el espacio de soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, cuya matriz ampliada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Así $\operatorname{Nul} A$ esta formado por los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in I\!R^4$ que verifican

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 9x_4 \\ x_3 &= -6x_4 \\ x_4 &= x_4 \end{aligned}$$

y que se pueden expresar en forma parámetrica como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in I\!R$$

El espacio $\operatorname{Nul} A$ tiene dimensión 1. Una base de $\operatorname{Nul} A$ es $\{(0, 9, -6, 1)\}$.

c) *(0,2 puntos)* Calcula la dimensión y una base de $\operatorname{Col} A$ (espacio generado por los vectores columna de A)

Solución: La dimensión de $\operatorname{Col} A$ es igual al rango de A que es 3. Entonces $\operatorname{Col} A = I\!R^3$ y así cualquier base de $I\!R^3$ es base de $\operatorname{Col} A = I\!R^3$, por ejemplo la formada por los vectores

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. *(0,8 puntos)* Sabiendo que $T : I\!R^3 \mapsto I\!R^2$ es lineal y verifica

$$T(1, 0, 0) = (1, 1), \;\; T(0, 1, 0) = (1, 2) \;\text{ y }\; T(0, 0, 1) = (1, -1)$$

determina el conjunto de vectores que la aplicación T transforma en $(1, 0)$, es decir el conjunto de vectores $(x, y, z) \in I\!R^3$ tales que $T(x, y, z) = (1, 0)$.

Solución: La matriz de la transformación T es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Entonces, el el conjunto de vectores pedido es el conjunto solución del sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 2 & -1 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 2 \\ 0 & 1 & -2 & | & -1 \end{bmatrix}$$

el sistema es equivalente a $x = 2 - 3z$, $y = -1 + 2z$, $z = z$ y sus soluciones se pueden escribir como

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in I\!R$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

3. *(1 puntos: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y $-0{,}1$ por cada respuesta errónea)* Sean A una matriz 10×10 de rango 8, $T : \mathbb{R}^{10} \mapsto \mathbb{R}^{10}$ la transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, $\mathbf{a} \in I\!R^{10}$ y $\mathbf{b} = T(\mathbf{a})$. Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean la matriz A y el vector $\mathbf{a}$).

T es suprayectiva	N
T es inyectiva	N
El espacio nulo de T tiene dimensión 2	S
Existen infinitos vectores $\mathbf{x}$ tales que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$	S
Existe un único vector $\mathbf{x}$ tal que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$	N
Existen infinitos vectores $\mathbf{x}$ tales que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$	X
El vector $\mathbf{a}$ pertenece a la imagen de T	X
Si $T(\mathbf{c}) = 0$ entonces $T(\mathbf{a} + 5\mathbf{c}) = \mathbf{b}$	S
Las columnas de A son un sistema de generadores de $I\!R^{10}$	N
$\lambda = 0$ es un valor propio de A	S

4. Sean $\mathcal{B}_1 = \{(1,1), (-1,1)\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{(-1,0), (0,-1)\}$.

a) *(1 punto)* Obtener las matrices de cambio de base $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$ y $P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}$.

Solución: Existen diversas maneras de calcular $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$. Como

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{se verifica} \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y como

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{se verifica} \quad \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Otra forma distinta sería utilizar que

$$P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{E}$ denota a la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Entonces

$$P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{E}} = P^{-1}_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{E}} P_{\mathcal{E} \leftarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2}$ se podría calcular de la misma forma que se ha calculado $P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1}$, o bien

$$P_{\mathcal{B}_1 \leftarrow \mathcal{B}_2} = P^{-1}_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) *(0,5 puntos)* Si las coordenadas del vector $\mathbf{v}$ respecto a la base $\mathcal{B}_1$ son $(1,1)$, ¿Cúales son sus coordenadas respecto a la base canónica? ¿y respecto a $\mathcal{B}_2$?

Solución: Como las coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a la base $\mathcal{B}_1$ son $(1,1)$, se tiene

$$\mathbf{v} = (1,1) + (-1,1) = (0,2) \quad \text{y entonces sus coordenadas en la base canónica son} \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Las coordenadas de $\mathbf{v}$ respecto a la base $\mathcal{B}_2$ son

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_2 \leftarrow \mathcal{B}_1} [\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

También podría observarse directamente que

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}_2} = [(0,2)]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

5. *(1,5 puntos)* Diagonaliza ortogonalmente

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

sabiendo que el polinomio característico de A es $\det(A - I\lambda) = -(\lambda - 10)(\lambda - 1)^2$

Solución: El espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 10$ es el espacio nulo de la matriz $A - 10I$, es decir es el espacio formado por los vectores (x, y, z) verificando

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene

$$\begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & -5 & 2 & | & 0 \\ 2 & 2 & -8 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 0 \\ -5 & 4 & 2 & | & 0 \\ 4 & -5 & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 9 & -18 & | & 0 \\ 0 & -9 & 18 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 10$ esta formado por los vectores verificando $x = 2z$, $y = 2z$. $\{(2, 2, 1)\}$ es una base de este espacio, y

$$\left\{\frac{1}{3}(2, 2, 1)\right\}$$

es una base ortonormal.

El espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 1$ es el espacio nulo de la matriz $A - I$, es decir es el espacio formado por los vectores (x, y, z) verificando

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

o equivalentemente por los vectores verificando $2x + 2y + z = 0$. Una base de este espacio está formada por $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0)$ y por $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -2)$. Para obtener una base ortogonal aplicamos el proceso de Gram-Schmidt

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Una base ortogonal del espacio es $\{(1,-1,0),(1,1,-4)\}$ y entonces una base ortonormal es

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \frac{1}{3\sqrt{2}}(1,1,-4)\right\}$$

Una diagonalización ortogonal de A es pues

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{-4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{-4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

6. *(1 punto)* Encuentra la solución general de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 12x$

Solución: El polinomio característico es $k^2 + 4$ cuyas raíces son $\pm 2j$. Entonces, la solución general de la ecuación homogénea asociada es $C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)$.

Como 0 no es raíz del polinomio característico buscamos una solución particular del tipo $y_P = ax + b$. Se tiene

$$y'_P = a,\ y''_P = 0 \quad y''_P + 4y_P = 4(ax+b)$$

Se verifica

$$y''_P + 4y_P = 4(ax+b) = 12x$$

cuando $a = 3$ y $b = 0$. Entonces una solución particular es $y_P = 3x$ y la solución general es

$$y = 3x + C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x)$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

7. Sea A la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Denotamos a las columnas de A por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$, es decir $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$.

a) *(0,2 puntos)* ¿Es $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$? (Justifica la respuesta)

Solución: Sí, ya que Det $A = -2 \neq 0$ y entonces A es no singular lo que implica que sus columnas forman una base de $\mathbb{R}^3$.

b) *(0,8 puntos)* Encuentra una base ortogonal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ tal que Gen$\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ = Gen$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$

Solución: podemos obtener la base ortogonal pedida aplicando el proceso de Gram-Schmidt:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como

$$\mathbf{a}_2 - \frac{\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} \quad \text{tomamos} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como

$$\mathbf{a}_3 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \quad \text{tomamos} \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

c) *(0,5 puntos)* Halla la proyección ortogonal de $\mathbf{a}_3$ sobre el espacio generado por $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$

Solución: $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ es una base ortogonal del espacio generado por $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$. Entonces la proyección pedida es

$$\text{Proy}_{\text{Gen}\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\}}\, \mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

d) *(0,2 puntos)* ¿Es $\{(1,1,1),(1,-1,0),(1,1,-2)\}$ base ortogonal de $\mathbb{R}^3$? (Justifica la respuesta)

Solución: Sí, ya que

$$(1,1,1)\cdot(1,-1,0)=0, \quad (1,1,1)\cdot(1,1,-2)=0, \quad (1,-1,0)\cdot(1,1,-2)=0$$

e) *(1 punto)* Sabiendo que $(1,1,1)$, $(1,-1,0)$ y $(1,1,-2)$ son vectores propios de A, diagonaliza A ortogonalmente

Solución: Como

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\2\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$$

una diagonalización ortogonal es

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

f) *(0,3 puntos)* Sin calcular previamente la matriz A^2, calcula los valores propios de A^2

Solución: En el apartado anterior hemos obtenido que para una matriz ortogonal P se tiene que

$$A=PDP^\top$$

donde

$$D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

Entonces

$$A^2=PDP^\top PDP^\top=PD^2P^\top=P\begin{bmatrix}2^2&0&0\\0&1^2&0\\0&0&(-1)^2\end{bmatrix}P^\top$$

Por tanto los valores propios de A^2 son 4 y 1 (el 1 es raíz doble del polinomio característico).