EXAMEN FINAL DE ÁLGEBRA LINEAL

Fecha: 21 de enero de 2019 — Duración del examen: 3 horas

Publicación notas: 29 de enero de 2019 — Revisión del examen: 1 de febrero de 2019

APELLIDOS: NOMBRE:

---

1. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z)=(x-2y+z,-x+3y+z)$ y $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la transformación que verifica $S(1,0,0)=(1,0,0)$, $S(0,1,0)=(1,1,0)$ y $S(0,0,1)=(0,1,1)$.

   (a) *(0,7 puntos)* Calcula todos los vectores (x,y,z) que verifican $T(x,y,z)=(0,1)$

   Solución: Los x,y,z verificando $T(x,y,z)=(0,1)$ son las soluciones del sistema cuya matriz ampliada es

$$\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & | & 0\\ -1 & 3 & 1 & | & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & | & 0\\ 0 & 1 & 2 & | & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 5 & | & 2\\ 0 & 1 & 2 & | & 1\end{bmatrix}$$

   y entonces verifican

$$\begin{cases}x=2-5z\\ y=1-2z\\ z=z\end{cases}\qquad \text{o equivalentemente}\qquad \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}-5\\-2\\1\end{bmatrix},\quad \lambda\in\mathbb{R}.$$

   (b) *(0,7 puntos)* Estudia si S es invertible, y en caso afirmativo calcula $T\big(S^{-1}(x,y,z)\big)$

   Solución: La matriz de S es

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

   y

$$\begin{bmatrix}S & | & I\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

   Entonces S es invertible y

$$T\big(S^{-1}(x,y,z)\big)=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ -1 & 4 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-3y+4z\\ -x+4y-3z\end{bmatrix}$$

2. Sean $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ y $\mathcal{W} = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ dos bases de un espacio vectorial V. Sabiendo que $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{u} = 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, determinar:

(a) *(0,5 puntos)* $P_{\mathcal{W}\leftarrow\mathcal{V}}$, matriz de cambio de base de $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$

Solución: Se tiene que

$$P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{W}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

y entonces

$$P_{\mathcal{W}\leftarrow\mathcal{V}} = P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{W}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) *(0,5 puntos)* $[\mathbf{u}]_{\mathcal{W}}$ y $[\mathbf{u}]_{\mathcal{V}}$, vectores de coordenadas de $\mathbf{u}$ en las bases $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente.

Solución: Se tiene que

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

y entonces

$$[\mathbf{u}]_{\mathcal{W}} = P_{\mathcal{W}\leftarrow\mathcal{V}}[\mathbf{u}]_{\mathcal{V}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

3. Sea S el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix}, \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{w} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) *(1 punto)* Calcula una base y la dimensión de S en función de los valores del parámetro a.

Solución: Se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 \end{bmatrix}$$

Como $2-a-a^2$ se anula cuando $a=1$ o $a=-2$, distinguimos 3 casos:

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ entonces rango $\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = 3$ y la dimensión de S es 3. Por tanto $S = \mathbb{R}^3$ y una base de S esta formada por cualesquiera 3 vectores linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$, por ejemplo por $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ o por $(1,0,0), (0,1,0)$ y $(0,0,1)$.

- Si $a = 1$ entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Entonces la dimensión de S es 1 y una base de S es $\{\mathbf{u}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

- Si $a = -2$ entonces

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

  Entonces la dimensión de S es 2 y una base de S es $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(b) *(0,5 puntos)* Si $a = -2$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, ¿ pertenece el vector $\mathbf{p}$ a S? En caso afirmativo escribir $\mathbf{p}$ en combinación lineal de una base de S.

Solución: Se tiene que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y entonces $\mathbf{p}$ pertenece a S y $\mathbf{p} = -3\mathbf{u} - 2\mathbf{v}$.

4. *(1 punto: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y $-0{,}1$ por cada respuesta errónea)* Sean A una matriz 4×4 invertible (no singular) y B una matriz 4×4 de rango 3. Sean $T_A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ y $T_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ las transformaciones definidas por $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ y $T_B(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$. Sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ y $\mathbf{c} = B\,\mathbf{b}$. Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean A, B, $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$).

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una única solución	S
El sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones	X
El sistema $B\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiene infinitas soluciones	S
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene infinitas soluciones	N
La transformación T_A es inyectiva	S
La imagen (o rango) de T_B tiene dimensión 3	S
$\mathbf{b}$ es combinación lineal de las columnas de B	X
$\mathbf{c}$ pertenece al espacio imagen (o rango) de T_A	S
$\mathbf{c}$ pertenece al espacio imagen (o rango) de T_B	S
La matriz de $T_A \circ T_B$ es BA ($T_A \circ T_B(x) = T_A[T_B(\mathbf{x})]$)	X

En la último recuadro la respuesta es X ya que podría ocurrir que $AB = BA$, por ejemplo si A y B son diagonales. No obstante, en la corrección del examen, la respuesta lógica N ha sido contada también como correcta.

APELLIDOS:

5. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una transformación lineal que verifica $T(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_1$, $T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$, $T(\mathbf{u}_3) = T(\mathbf{u}_4) = \mathbf{0}$ siendo $\mathcal{B} = \{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}, \mathbf{u_4}\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

   (a) *(0,2 puntos)* Determina $[T]_{\mathcal{B}}$, la matriz de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ (la $\mathcal{B}$-matriz de T).

   Solución: Como $T(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_1$, $T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2$, $T(\mathbf{u}_3) = T(\mathbf{u}_4) = \mathbf{0}$, entonces $[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) *(0,3 puntos)* Calcula la matriz de T con respecto a la base $\{\mathbf{u}_4, \mathbf{u_1}, \mathbf{u_1} + \mathbf{u_3}, \mathbf{u_2}\}$.

   Solución: Como $T(\mathbf{u}_4) = \mathbf{0}$, $T(\mathbf{u}_1) = 2\mathbf{u}_1$, $T(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_3}) = \mathbf{T}(\mathbf{u_1}) + \mathbf{T}(\mathbf{u_3}) = \mathbf{T}(\mathbf{u_1}) = \mathbf{2u_1}$, $T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{0}$ se tiene que $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. *(0,6 puntos)* Resuelve la ecuación diferencial $y'' + 2y' + y = x$.

   Solución: El polinomio característico es $k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ que tiene raíz $k = -1$ doble. Entonces dos soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada son e^{-x} y xe^{-x}.

   Como 0 no es raíz del polinomio característico, existe una solución particular del tipo $y_p = ax+b$. Teniendo en cuenta que $y_p' = a$ y $y_p'' = 0$, sustituyendo en la ecuación se obtiene que $2a + ax + b = x$ de donde $a = 1$ y $b = -2$. Entonces $y_p = x - 2$ y la solución general es

$$y = x - 2 + C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

7. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ k^2-1 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ donde $k \in \mathbb{R}$.

(a) *(0,5 puntos)* Sabiendo que una raíz del polinomio característico de A es $\lambda = 6$, determinar para qué valores del parámetro k la matriz A es diagonalizable. Justifica la respuesta.

Solución: La matriz A es diagonalizable si el espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 6$, que es raíz doble del polinomio característico, tiene dimensión 2. El espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 6$ es el espacio nulo de la matriz

$$A - 6I = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ k^2-1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 \\ k^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si $k = 1$ o $k = -1$ el rango de $A - 6I$ es 1, entonces la dimensión del espacio nulo de $A - 6I$ es 2 y por tanto la matriz A es diagonalizable.

Si $k \neq 1$ y $k \neq -1$ el rango de $A - 6I$ es 2, entonces la dimensión del espacio nulo de $A - 6I$ es 1 y por tanto la matriz A no es diagonalizable.

(b) *(0,8 puntos)* Para $k = 1$ encontrar una base del espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 6$.

Solución: Si $k = 1$ el espacio propio propio asociado a $\lambda = 6$, tiene dimensión 2 y esta formado por las soluciones del sistema con matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 5 & 0 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -5 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

o equivalentemente por aquellos vectores (x, y, z) verificando $-5x + 2z = 0$. Una base de este espacio, que sabemos que tiene dimensión 2, esta formada por dos vectores cumpliendo la ecuación y que sean linealmente independientes. Por ejemplo,

$$\{\, (0, 1, 0)\, ,\ (2, 0, 5)\, \}$$

es una base del espacio propio asociado al valor propio $\lambda = 6$.

8. Sean $\mathbf{u_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$

   (a) *(0,5 puntos)* Sabiendo que $\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$ es una base ortogonal del subespacio $V = \mathrm{Gen}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$, calcula el vector de V más cercano a $\mathbf{w}$.

   Solución: El vector de V más cercano a $\mathbf{w}$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{w}$ sobre V:

$$\begin{aligned} \mathrm{Proy}_V \mathbf{w} &= \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|^2}\mathbf{u_1} + \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|^2}\mathbf{u_2} \\ &= \frac{(0,1,0)\cdot(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|^2}(1,-1,1) + \frac{(0,1,0)\cdot(2,1,-1)}{\|(2,1,-1)\|^2}(2,1,-1) \\ &= -\frac{1}{3}(1,-1,1) + \frac{1}{6}(2,1,-1) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

   (b) *(0,3 puntos)* Halla la distancia de $\mathbf{w}$ a V.

   Solución: La distancia de $\mathbf{w}$ a V es

$$\mathrm{dist}(\mathbf{w}, V) = \mathrm{dist}(\mathbf{w}, \mathrm{Proy}_V \mathbf{w}) = \|\mathbf{w} - \mathrm{Proy}_V \mathbf{w}\| = \left\|\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

   (c) *(0,5 puntos)* Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre V, es decir, la matriz P tal que

$$\mathrm{Proy}_V \mathbf{x} = P\,\mathbf{x}, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

   Solución: En primer lugar, normalizamos los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ para obtener una base ortonormal de V:

$$\left\{\frac{\mathbf{u_1}}{\|\mathbf{u_1}\|}, \frac{\mathbf{u_2}}{\|\mathbf{u_2}\|}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)\right\}$$

   Por tanto, la matriz de la proyección ortogonal sobre V es

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(d) *(0,6 puntos)* Construye una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$.

Solución: Para construir una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$, basta hallar un vector $\mathbf{u_3}$ que sea ortogonal a $V = \text{Gen}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}\}$, es decir, que pertenezca a $V^\perp$. Por ejemplo, $\mathbf{w} - \text{Proy}_V\,\mathbf{w} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Para eliminar denominadores podemos tomar $\mathbf{u_3} = (0, 1, 1)$. Por tanto, una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contiene a los vectores $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ es

$$\big\{(1, -1, 1), (2, 1, -1), (0, 1, 1)\big\}.$$

9. *(0,3 puntos)* Sea $\mathbb{P}_2$ el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a 2, $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ la base estándar de $\mathbb{P}_2$, y $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ la transformación definida por $T(p(x)) = 2p(0) + p(1)$ (por ejemplo $T(x^2 + 2x + 3) = 2 \times 3 + 6 = 12$). Calcula la matriz de T respecto a la bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_2$ y $\{1\}$ de $\mathbb{R}$.

Solución: Se tiene que $T(1) = 3$, $T(1) = 1$ y $T(x^2) = 1$ y entonces la matriz respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{E}$ es

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. *(0,4 puntos)* Sea $\mathbb{P}_2$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2 y $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal cuya matriz con respecto a la base $\mathcal{C} = \{x, 1 + x, x^2\}$ es $[T]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calcula $T(1)$

Solución: Se tiene que

$$[T(1)]_\mathcal{C} = [T]_\mathcal{C}[T(1)]_\mathcal{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Entonces

$$T(1) = (-1) \cdot x + (-1) \cdot x^2 = -x - x^2$$