Departamento Matemáticas **ÁlgebraLineal**

Problema 1 Sea $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación definida por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + x_4)$,

y sea $H:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz estandar es $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Apartado1(a) [0,5 puntos]_ Expresa el conjunto de vectores $\mathbf{x}$ pertenecientes a $\mathbb{R}^4$ que verifican $T(\mathbf{x}) = (1, 2)$. ¿Es este conjunto un subespacio vectorial?

Solución

La matriz ampliada del sistema es $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ cuya forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces un sistema equivalente es $\begin{cases} x_1 = 1 + \frac{x_3}{3} - \frac{x_4}{4} \\ x_2 = \frac{2x_3}{3} + \frac{x_4}{3} \end{cases}$ cuyas soluciones se pueden expresar

como $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

El conjunto de soluciones no es subespacio vectorial ya que no contiene el vector **0**

Apartado1(b) [0,5 puntos] Calcula una base del espacio nulo (o núcleo) de T

Solución

Siguiendo los pasos del apartado anterior se obtiene que las soluciones de **T(x)=0** son

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces los vectores (1/3 ,2/3 ,1, 0) y (-1/3 ,1/3 ,0, 1) forman una base del nucleo de T

Apartado1(c) [0,5 puntos] Calcula la matriz estándar de la aplicación F(**x**)=H(T(**x**)) . Calcula la dimensión de los espacios nulo e imagen de F.

Solución

La matriz estándar de $H \circ T$ es $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

EL rango de esta matriz es 2 . Por todo esto la dimensión del espacio imagen de $H \circ T$ es 2

Por el teorema del rango la dimensión del espacio nulo es 2.

Apartado1(d) [0,5 puntos] Calcula la aplicación inversa de G(**x**)=H(H(**x**))

Solución

La matriz estándar de $H \circ H$ es

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ y su inversa $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ es la matriz de G^{-1}

.Así , G^{-1}(x,y)=(-y/2,x/2).

Problema 2 Sea A_λ la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Apartado2(a) [0,5 puntos]_ Determinar para que valores del parámetro λ es diagonalizable la matriz A_λ .

Solución

La matriz caracteristica de A_λ es $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -\lambda & x-1 & 0 \\ -1 & -1 & x-2 \end{bmatrix}$ y su polinomio caractristico es

$x^3 - 18x^2 + 104x - 192 = (x-1)(x-1)(x-2)$ El subespacio invariante para x = 1 es

$$\begin{cases} -\lambda x_1 = 0 \\ \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Observamos que para $\lambda \neq 0$ *el* espacio propio asociado a x = 1 tiene dimensión1 y por tanto A_λ no es diagonalizable

Si $\lambda = 0$ $\{(-1, 0, 1) = p_1, (-1, 1, 0) = p_2\}$ seria una base del subespacio propio asociado a x = 1 y la matriz A_0 es diagonalizable

Apartado2(b) [0,5 puntos] Diagonaliza la matriz A_0 (es decir A_λ para λ=0)

Solución

Una base del espacio propio asociado a x = 1 esta formado por $(-1, 0, 1)$ *y* $(-1, 1, 0)$ y para x = 2 por $(0, 0, 1)$

Entonces $A_0 = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Apartado2(c) [0,5 puntos] Calcula la matriz A_0^{24} (es decir A_λ^{24} para λ=0)

Solución

$$P=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} ,P^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_0^{24}=\left(P.D.P^{-1}\right)^{24}=P.D^{24}.P^{-1}=P.\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{24} \end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{24}-1 & 2^{24}-1 & 2^{24} \end{bmatrix}$$

Problema 3 [1 ***punto***] Resolver la ecuación diferencial lineal y ordinaria de 2º orden y'' +2y' +y=0 con las condiciones iniciales y(0)=1, y'(0)=0

Solución

El polinomio caracteristico sería $\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2$ Únicamente tiene un cero que es doble λ=-1.

Por tanto dos soluciones independientes son $y_1=e^{-x}$, $y_2=xe^{-x}$ y la solución general de la homogénea es

$$y_H=(C_1+C_2x)e^{-x}$$

Por último de las condiciones iniciales $\rightarrow y(0)=1, y'(0)=1$ deducimos que $C_1=C_2=1$

y por tanto la solución buscada es $\mathbf{y=(1+x)e^{-x}}$

Problema 4 Sea $\mathbb{P}_2(x)$ el espacio vectorial de los polinomios en una indeterminada x de coeficientes reales de grado menor o igual a 2,

Apartado4(a) [0,5 puntos]

Demostrar que los polinomios: $p_0=1$, $p_1=1+x$, $p_2=(1+x)^2$, constituyen una base de $\mathbb{P}_2(x)$

Solución

Las coordenadas de p_0, p_1 y p_2 son

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$ son vectores linealmente independientes . Por tanto forman una base

Apartado4(b) [0,5 puntos] Sea D: $\mathbb{P}_2(x) \to \mathbb{P}_2(x)$ la aplicación lineal tal que a cada polinomio le hace corresponder su derivada D(p(x))=p'(x). Demuestra que D es lineal y calcula la matriz de D respecto de la base canónica $\{1, x, x^2\}$
de $\mathbb{P}_2(x)$

Solución

Como
$\mathbf{D}(p_1 + p_2) = \mathbf{D}(p_1) + \mathbf{D}(p_2)$ *y* $\mathbf{D}(\lambda p_1) = \lambda \mathbf{D}(p_1)$ entonces D es lineal
por otra parte $\mathbf{D}(1) = 0$, $\mathbf{D}(x) = 1$, $\mathbf{D}(x^2) = 2x$ Por consiguiente
la matriz pedida es

$$MD = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Apartado4(c) [0,5 puntos] Calcula la matriz de D respecto de la base $\mathscr{B} = \{1, 1+x, (1+x)^2\}$ de $\mathbb{P}_2(x)$

Solución

Se tiene $\mathbf{D}(1) = 0$, $\mathrm{D}(1+x) = 1$, $\mathbf{D}((1+x)^2) = 2(1+x)$ por consiguiente

la matriz pedida es $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Apartado4(d) [0,5 puntos] Estudia si D es suprayectiva y si es inyectiva

Solución

ker(D)$\neq\{\mathbf{0}\}$. Por el teorema del Rango dim Im D<3 y en consecuencia Im D$\neq$ $\mathbb{P}$

$_2$. Por tanto no es inyectiva ni sobreyectiva.

Problema 5 Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ formado por los vectores (x, y, z) que cumplen $z = x + y$

Apartado5(a) [0,75 puntos]_ Calcula una base ortogonal de V que contenga al vector (1,0,1)

Solución

Aplicamos Gram Schmidt tomando $v1 = (1, 0, 1)$.Otro vector de V es $x2 = (0, 1, 1)$

Entonces $v2 = x2 - \frac{x2 \cdot v1}{v1 \cdot v1} v1 = \left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ Así $\{(1, 0, 1), (-1, 2, 1)\}$ es una base ortogonal de V

Apartado5(b) [0,75 puntos] Sea w=(1,0,0). Calcula los vectores $\widehat{w} \in V$ y $z \in V^{\perp}$ tales que $w = \widehat{w} + z$

Solución

$$\widehat{w} = \text{Projection}_V w = \frac{v_1 \cdot w}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{v_2 \cdot w}{v_2 \cdot v_2} v_2 = (2/3, -1/3, 1/3)$$

z= w-$\widehat{w}$ =(1/3,1/3,-1/3)

SEGUNDO MÉTODO

Normalizamos los vectores de la base del apartado a) y construimos la matriz Proyección P

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \quad U^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \rightarrow P = U.U^T = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\widehat{w} = P.w = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Apartado5(c) [0,5 puntos] Calcula la distancia de (1,0,0) a V.

Solución

la distancia de $(1, 0, 0)$ *a V.* es la norma de $z = (1/3, 1/3, -1/3)$

$\|z\| = 1/\sqrt{3} = 0.5774$

```
Norm of orthogonal complement: .5774
```

Problema 6 Sea A la matriz $\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Apartado6(a) [0.5 puntos]_ Determinar si es posible diagonalizar la matriz A .

Solución

Como A es simétrica entonces es diagonalizable

Otro método es observar que la matriz caracteristica de A es $\begin{bmatrix} \lambda - 6 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda - 6 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 6 \end{bmatrix}$ y que su polinomio caractristico es

$$\lambda^3 - 18\lambda^2 + 104\lambda - 192 = (\lambda - 6)(\lambda - 8)(\lambda - 4)$$

Como todos sus ceros son simples y reales es posible diagonalizar A

Apartado6(b) [0.5 puntos] En caso afirmativo determine la base en la que la matriz A adopta una forma diagonal y dar la expresión de dicha matriz diagonal

Solución

Una base formada por los vectores propios asociados a $(\lambda = 8)$, $(\lambda = 4)$ *y* $(\lambda = 6)$ esta formada las columnas de la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Apartado6(c) [0.5punto] Determinar una matriz diagonal D y una matriz B ortogonal (es decir cuyas columnas formen una base ortonormal) tales que $A=BDB^T$

Solución

La matriz diagonal es $D=\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

Normalizando las columnas de P se obtiene

$$B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{\top}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{y} \quad A=B.\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}B^{\top}$$

Departamento de Matemática Aplicada a la I.T.T.

ASIGNATURA*:* ÁLGEBRA LINEAL
Fecha publicación de notas: ...11 julio 2011
Fecha revisión examen: **....**...14 julio 2011