Asignatura: ÁLGEBRA LINEAL **Fecha:** 26 de Junio de 2014

Fecha publicación notas: 7 de Julio de 2014 **Fecha revisión examen:** 10 de Julio de 2014

Duración del examen: 2 horas y media

APELLIDOS:

NOMBRE: **DNI:** **Titulación:**

---

1. *(1 punto: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y −0,1 por cada respuesta errónea)* Sean $\mathbf{b}$ un vector (columna) de $\mathbb{R}^4$, $\mathbf{c}$ un vector (columna) de $\mathbb{R}^{10}$, A una matriz cuya forma escalonada reducida es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

T la transformación de $\mathbb{R}^{10}$ en $\mathbb{R}^4$ definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, L la transformación de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^{10}$ definida por $L(\mathbf{x}) = A^\top\mathbf{x}$. La matriz $A^\top$ denota la traspuesta de A. $\mathrm{Col}\,A$ y $\mathrm{Nul}\,A$ son respectivamente el espacio columna y el espacio nulo de la matriz A. Rellena la siguiente tabla con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean la matriz A y el vector $\mathbf{b}$). Por ejemplo, en la afirmación: "$A \in \mathcal{M}_{4\times 10}$" se pondría S, en la afirmación: "$A = 0$" se pondría N, y en la afirmación: "$A\mathbf{c} = \mathbf{b}$", se pondría X ya que no siempre ocurre (pero podría ocurrir).

$\dim \mathrm{Nul}\,A = 4$	N
$\dim \mathrm{Col}\,A = 4$	S
T es inyectiva	N
Rango $A^\top = 4$	S
L es inyectiva	S
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene infinitas soluciones	S
El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única	N
El sistema $A^\top\mathbf{x} = \mathbf{c}$ tiene solución única	X
El sistema $A^\top\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución única	S
$\mathrm{Nul}\,A = \mathbb{R}^6$	N

2. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) *(1 punto)* Obtén una base de $\mathrm{Nul}\, A$ (espacio nulo de A).

Solución: Las siguientes equivalencias por fila proporcionan la forma escalonada reducida de la matriz A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, cuyo conjunto solución es $\mathrm{Nul}\, A$, es equivalente a

$$\begin{aligned} x_1 &= -2x_3 - 3x_4 - x_5 \\ x_2 &= x_3 + x_4 \\ x_3 &= x_3 \\ x_4 &= x_4 \\ x_5 &= x_5 \end{aligned}$$

que podemos escribir vectorialmente como

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto una base de $\mathrm{Nul}\, A$ esta formada por

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b) *(0,5 puntos)* Sean $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ verificando $A\mathbf{c} = \mathbf{b}$. Calcula una expresión paramétrica para las soluciones del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solución: El vector $\mathbf{c}$ es una solución particular del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Las soluciones del sistema homogéneo asociado $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ se obtuvieron en el apartado a). Así las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se pueden expresar como

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} + \lambda \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

3. El polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

es $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 9)^2$.

a) *(1,5 puntos)* ¿Existe una matriz P cuya primera columna sea $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y una matriz D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$? En caso afirmativo calcula una matriz P cumpliendo estas condiciones.

Solución: Nótese que la matriz A es simétrica y por tanto es diagonalizable ortogonalmente. El sistema $(A - 9I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el espacio propio asociado al valor propio 9 tiene dimensión 2. Además podemos obtener una base cuyo primer elemento sea $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, por ejemplo la formada por

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & -18 & -18 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces el espacio propio asociado al valor propio 0 tiene dimensión 1 y una base es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Entonces una matriz P cumpliendo las condiciones pedidas es

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

b) (1 punto) ¿Existe una matriz U ortogonal y una matriz B diagonal tales que $A = UBU^{\top}$? En caso afirmativo calcula una matriz U cumpliendo estas condiciones.

Solución: Sí existen ya que la matriz A es simétrica y por tanto es diagonalizable ortogonalmente. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt a la base del espacio propio asociado al valor propio 9 obtenida en el apartado anterior, se obtiene la base ortogonal formada por

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{-4}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 4/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de donde deducimos la base ortonormal formada por

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Entonces una matriz U cumpliendo las condiciones pedidas es

$$U = \begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}$$

4. *(1 punto)* Sean $\mathbb{P}_2$ el espacio de los polinomios de grado menor o igual a 2, $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{P}_2$ dada por $\mathcal{B} = \{1 + x, x, x^2\}$ y $T : \mathbb{P}_2 \mapsto \mathbb{P}_2$ la transformación lineal definida por $T(p(x)) = p(x - 1)$, por ejemplo $T(x^2 + 3x + 5) = (x - 1)^2 + 3(x - 1) + 5$. Calcula la $\mathcal{B}$-matriz de T, es decir la matriz de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ (tanto en el espacio original como en el final).

Solución: Los transformados de la base $\mathcal{B}$ son

$$T(1 + x) = x, \quad T(x) = x - 1, \quad T(x^2) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

Teniendo en cuenta que $x - 1 = -(1 + x) + 2x$ y que $x^2 - 2x + 1 = 1 + x - 3x + x^2$, se obtiene que las coordenadas de estos transformados en la base $\mathcal{B}$ son

$$[T(1 + x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(x^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto la $\mathcal{B}$-matriz de T es

$$T_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

APELLIDOS Y NOMBRE:

5. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) *(0,5 puntos)* Calcula la solución mínimos cuadrados del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solución: Se tiene que

$$A^\top A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad A^\top \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones normales $A^\top A\mathbf{x} = A^\top \mathbf{b}$ tiene la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 10 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

La solución de las ecuaciones normales, y por tanto la solución mínimos cuadrados, es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

b) *(1,5 puntos)* Calcula P matriz de la proyección ortogonal sobre el espacio columna de A.

Solución: Como las columnas de A son independientes, una base de $\operatorname{Col} A$ esta formada por las dos columnas de A. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt se obtiene

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Así una base ortonormal de $\operatorname{Col} A$ esta formada por

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz de la proyección ortogonal es

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/\sqrt{12} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} \\ 1/2 & 1/\sqrt{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -3/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} & 1/\sqrt{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Esta matriz se puede también calcular utilizando la fórmula $P = A(A^\top A)^{-1}A^\top$.

c) *(0,5 puntos)* Calcula $\mathrm{Proy}_{\mathrm{Col}\,A}\mathbf{b}$ (proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre el espacio columna de A) utilizando la matriz P calculada en el apartado b). Comprueba que $A\mathbf{c} = \mathrm{Proy}_{\mathrm{Col}\,A}\mathbf{b}$ donde $\mathbf{c}$ es la solución mínimos cuadrados de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ calculada en el apartado a)

Solución: La proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre $\mathrm{Col}\,A$ es

$$\mathrm{Proy}_{\mathrm{Col}\,A}\mathbf{b} = P\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Se tiene que

$$A\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

lo que comprueba que $A\mathbf{c} = \mathrm{Proy}_{\mathrm{Col}\,A}\mathbf{b}$

6. Sean

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ y $\mathcal{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

a) *(0,8 puntos)* Calcula $P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{V}}$ (matriz de cambio de base de la base $\mathcal{V}$ a la base $\mathcal{U}$).

Solución: Las coordenadas de los elementos de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{U}$ son

$$[\mathbf{v}_1]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}_2]_{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Entonces

$$P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

b) *(0,2 puntos)* ¿Es $P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{V}}$ una matriz ortogonal?

Solución: $P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{V}}$ es ortogonal ya que

$$P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{V}} P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{V}}^{\top} = I$$

c) *(0,5 puntos)* Calcula $P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}}$ y utilizando esta matriz calcula las coordenadas del vector $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ en la base $\mathcal{V}$.

Solución:

$$P_{\mathcal{V}\leftarrow\mathcal{U}} = P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{V}}^{-1} = P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{V}}^{\top} = P_{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Las coordenadas de $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathcal{U}$ son $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ y entonces sus coordenadas en $\mathcal{V}$ son

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$