Asignatura: ÁLGEBRA LINEAL **Fecha del examen:** 26 de Junio de 2017

Publicación notas: 3 de Julio de 2017 **Fecha revisión examen:** 6 de Julio de 2017

Duración del examen: 2 horas y 30 minutos

APELLIDOS:

NOMBRE: **DNI:** **Titulación:**

---

1. Sea A una matriz 3×5 cuya forma escalonada reducida es $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   a) *(0,5 puntos)* Calcula una base del espacio nulo de la matriz A.

   Solución: Los vectores $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ del espacio nulo de A verifican $\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases}$ y

   entonces $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Una base de Nul A es $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

   b) *(1,2 puntos: 0,1 puntos por cada respuesta correcta y $-0{,}1$ por cada respuesta errónea)* Sean $\mathbf{b}$ un vector columna de $\mathbb{R}^3$ y $T : \mathbb{R}^5 \mapsto \mathbb{R}^3$ la transformación definida por $T(\mathbf{x}) = A\,\mathbf{x}$. Denominamos $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$ a las 5 columnas de A, es decir $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{a}_5 \end{bmatrix}$. Rellena los siguientes recuadros con S (Siempre), N (Nunca), o con X (podría ocurrir o no, dependiendo de cuales sean la matriz A y el vector $\mathbf{b}$).

El rango de A es 3	S
T es inyectiva	N
T es suprayectiva	S
Existen infinitos vectores $\mathbf{x}$ tales que $T(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$	S
Existen un único vector $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	N
La imagen o rango de T es $\mathbb{R}^3$	S
El núcleo (o espacio nulo) de T tiene dimensión 2	S
El vector $\mathbf{b}$ pertenece a la imagen de T	S
El vector $\mathbf{a}_5$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$	N
$\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$	S
$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$	S
$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$	N

2. Sea V el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$

a) *(0,4 puntos)* Calcula una base y la dimensión de V

Solución: La equivalencia por filas

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 15 \\ -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 0 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 15 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

muestra que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de V y que V tiene dimensión 2.

b) *(0,4 puntos)* Calcula una matriz $A \in \mathcal{M}_{1\times 3}$ tal que $V = \operatorname{Nul} A$ (espacio nulo de A).

Solución: Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una base de V, la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$ cumple que $\operatorname{Nul} A = V$ si se verifica

$$A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \text{y} \qquad A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

o equivalentemente si $a - b = 0$ y $2a + c = 0$. Por ejemplo la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

cumple que $\operatorname{Nul} A = V$.

3. *(0,8 puntos)* Encuentra la única función $y(x)$ que verifica

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Solución: El polinomio ceracterístico de la ecuación $y'' - 3y' + 2y = 0$ es $k^2 - 3k + 2$ cuyas raíces son $k = 1$ y $k = 2$. Entonces la solución general de la ecuación es

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

Como $y' = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$, para que se cumplan las condiciones iniciales $y(0) = 1, y'(0) = 0$, las constantes C_1 y C_2 tienen que verificar que $y(0) = C_1 + C_2 = 1$, $y'(0) = C_1 + 2C_2 = 0$. Resolviendo este sistema se obtiene que $C_2 = -1$, $C_1 = 2$. Entonces la única solución y verificando las condiciones iniciales es

$$y = 2e^x - e^{2x}$$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

4. Sea V el subespacio generado por $(1,0,-1)$ y $(3,1,1)$, $V = \text{Gen}\{(1,0,-1),(3,1,1)\}$, y sea $\mathbf{b} = (3,2,1)$.

   a) *(0,7 puntos)* Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre V, sin utilizar en este cálculo la matriz de la proyección ortogonal sobre V.

   Solución: Para obtener una base ortogonal de V aplicamos el proceso de Gram Schmidt a $\mathbf{v}_1 = (1,0,-1)$ y $\mathbf{v}_2 = (3,1,1)$:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1,0,-1), \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} = (3,1,1) - \frac{2}{2}(1,0,-1) = (2,1,2)$$

   Utilizando la base ortogonal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de V, se obtiene que

$$\text{Proy}_V \mathbf{b} = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{u}_2\|^2}\mathbf{u}_2 = \frac{2}{2}\mathbf{u}_1 + \frac{10}{9}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{9}(29,10,11)$$

   b) *(0,5 puntos)* Calcula la matriz de la proyección ortogonal sobre V

   Solución: A partir de la base ortogonal de V, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, calculada en el apartado anterior, se obtiene la base ortonormal de V, $\{\mathbf{u}_1/\|\mathbf{u}_1\|, \mathbf{u}_2/\|\mathbf{u}_2\|\} = \{(1,0,-1)/\sqrt{2}, (2,1,2)/3\}$ que proporciona la matriz de la proyección ortogonal sobre V:

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 17 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 17 \end{bmatrix}$$

   c) *(0,2 puntos)* Calcula la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre V utilizando en este cálculo la matriz de la proyección ortogonal sobre V.

   Solución: La proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre V es

$$\text{Proy}_V \mathbf{b} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 17 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 58 \\ 20 \\ 22 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 29 \\ 10 \\ 11 \end{bmatrix}$$

5. Sean $H = \left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

a) *(0,3 puntos)* Demuestra que H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$

Solución: H es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ puesto que

$$H = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es decir H es el subespacio vectorial generado por los vectores de $\mathbb{R}^3$, $(1, 2, 0)$ y $(1, 0, 1)$.

b) *(0,4 puntos)* Calcula $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}}$ ¿Que vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ verifica $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

Solución: Como $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene que $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. El vector $\mathbf{x}$ es el que tiene vector de coordenadas $(1, 1)$ en la base $\mathcal{B}$, es decir $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) *(0,8 puntos)* Calcula la matriz de cambio de base $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}$ (para la que se verifica $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}'}$)

Solución: Según el apartado anterior $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Como $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ se tiene que $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y entonces $P_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'} = \left(\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

d) *(0,5 puntos)* Sea $T : H \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Calcula la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B}$ de H y de la base estándar o canónica de $\mathbb{R}^3$

Solución: Se tiene que $T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, y entonces la matriz pedida es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

APELLIDOS: **NOMBRE:**

6. Una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}$ tiene dos valores propios 0 y 1. El espacio propio asociado al valor propio 0 es $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/ x - z = 0\right\}$ y el vector $(1,1,0)$ es un vector propio asociado al valor propio 1.

   a) *(0,3 puntos)* ¿Es A diagonalizable? ¿por qué?

   Solución: El rango de la matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ es 1 y entonces (Tª del rango) su espacio nulo, formado por los vectores (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ verificando $x - z = 0$, tiene dimensión 2. Así, el espacio propio asociado al vector propio 0, $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/ x - z = 0\right\}$, tiene dimensión 2. Una matriz 3×3 con 2 valores propios es diagonalizable si el espacio propio asociado al valor propio de multiplicidad 2 (el que es raíz doble del polinomio característico) tiene dimensión 2. Por tanto A es diagonalizable.

   b) *(1,2 puntos)* Calcula la matriz A

   Solución: Una base del espacio propio asociado al valor propio 0, $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/ x - z = 0\right\}$ es $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ y una base del espacio propio asociado al valor propio 1 es $(1,1,0)$. Entonces $A = PDP^{-1}$ donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Para calcular P^{-1} utilizamos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

   obteniendo $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Por tanto,

$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   c) *(0,3 puntos)* Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$.

   Solución: Utilizando la diagonalización obtenida en el apartado anterior se obtiene

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1} = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   d) *(0,2 puntos)* ¿Es A diagonalizable ortogonalmente? ¿por qué?

   Solución: No, porque $(1,1,0)$ vector propio asociado al valor propio 1, no es ortogonal a todos los vectores propios asociados al valor propio 0 (o también: no, porque A no es simétrica).

7. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) que verifican la ecuación $x_1 - x_3 + x_4 = 0$.

a) *(0,2 puntos)* ¿Que dimensión tiene V? Indica cual o cuales de los siguientes conjuntos son base ortogonal del subespacio V:

$$\mathcal{A} = \{(1,0,1,0), (-1,0,1,2)\}, \quad \mathcal{B} = \{(1,0,1,0), (-1,0,1,2), (1,0,-1,1)\}$$
$$\mathcal{C} = \{(1,0,1,0), (-1,0,1,2), (1,0,0,1)\}, \quad \mathcal{D} = \{(1,0,1,0), (-1,0,1,2), (0,1,0,0)\}$$

Solución: V tiene dimensión 3. Unicamente $\mathcal{D}$ es base ortogonal de V.

b) *(0,5 puntos)* Calcula el punto de V más cercano a $\mathbf{x} = (1,1,1,1)$.

Solución: Este punto es la proyección ortogonal de $\mathbf{x}$ sobre V que se puede calcular utilizando la base ortogonal $\mathcal{D}$ del subespacio V proporcionada en el apartado anterior:

$$\mathrm{Proy}_V \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

c) *(0,2 puntos)* Calcula la distancia de V a $\mathbf{x} = (1,1,1,1)$.

Solución: La distancia de V a $\mathbf{x}$ es

$$\mathrm{distancia}(V, \mathbf{x}) = \mathrm{distancia}(\mathrm{Proy}_V \mathbf{x}, \mathbf{x}) = \left\| \mathbf{x} - \mathrm{Proy}_V \mathbf{x} \right\| = \left\| (1/3,\ 0,\ -1/3,\ 1/3) \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

d) *(0,2 puntos)* Calcula un vector ortogonal a V.

Solución: El vector $\mathbf{x} - \mathrm{Proy}_V \mathbf{x} = (1/3,\ 0,\ -1/3,\ 1/3)$ es ortogonal a V.

También se obtiene un vector ortogonal a V observando que el subespacio V está formado por los vectores verificando $x_1 - x_3 + x_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (1, 0, -1, 1) = 0$ y en consecuencia el vector $(1, 0, -1, 1)$ es ortogonal a V.

e) *(0,2 puntos)* Encuentra vectores $\mathbf{v}_1 \in V$ y $\mathbf{v}_2 \in V^\perp$ verificando $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

Solución: $\mathbf{v}_1 = \mathrm{Proy}_V \mathbf{x} = (2/3, 1, 4/3, 2/3)$ y

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{x} - \mathrm{Proy}_V \mathbf{x} = (1/3,\ 0,\ -1/3,\ 1/3)$$

son los únicos vectores $\mathbf{v}_1 \in V$ y $\mathbf{v}_2 \in V^\perp$ verificando $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.