Cálculo II
9 de enero de 2015

Ejercicio 1 (3 puntos).

a) Calcule la derivada de la función $f(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$ en el punto $(2,0)$ en la dirección del vector $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

b) Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $g(0,0,0) = (2,0)$ y cuya matriz jacobiana en $(0,0,0)$ es $Jg(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcule las derivadas parciales de $f \circ g$ en $(0,0,0)$.

c) Calcule los puntos en los que f alcanza un máximo o un mínimo local.

Solución. En primer lugar se calcula el gradiente de f:

$$\nabla f(x,y) = \left(3e^y - 3x^2,\ 3xe^y - 3e^{3y}\right).$$

La función f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ porque sus derivadas parciales son continuas. Por ello, la derivada de f en la dirección de v se puede calcular de la siguiente forma:

$$D_v f(2,0) = \nabla f(2,0) \cdot v = (-9,3) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}-9}{2}.$$

Para calcular el gradiente de $f \circ g$ se aplica la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \nabla(f \circ g)(0,0,0) &= \nabla f(g(0,0,0))\ Jg(0,0,0) = \nabla f(2,0)\ Jg(0,0,0) \\ &= (-9,3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-9,3,12). \end{aligned}$$

Las derivadas parciales de $f \circ g$ son las coordenadas del gradiente:

$$\frac{\partial(f \circ g)}{\partial x}(0,0,0) = -9, \qquad \frac{\partial(f \circ g)}{\partial y}(0,0,0) = 3, \qquad \frac{\partial(f \circ g)}{\partial z}(0,0,0) = 12.$$

Para determinar los extremos locales de f se calculan primero los puntos críticos:

$$\nabla f(x,y) = \left(3e^y - 3x^2,\ 3xe^y - 3e^{3y}\right) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} e^y = x^2 \\ xe^y = e^{3y}. \end{cases}$$

La segunda ecuación implica que $x = e^{2y}$. Se introduce esta relación en la primera ecuación:

$$\begin{aligned} e^y &= x^2 = \left(e^{2y}\right)^2 = e^{4y}, \\ 1 &= e^{3y}, \\ y &= 0, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Por tanto, el único punto crítico es $(1,0)$. A continuación se calcula la matriz hessiana de f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 3e^y \\ 3e^y & 3xe^y - 9e^{3y} \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Como $\det H_f(1,0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) < 0$, la función f tiene un máximo local en $(1,0)$. No tiene mínimos locales.

Ejercicio 2

a) (1 punto). Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le y \le 2,\ y \le x \le 2y\}$. Calcule la siguiente integral:

$$\iint_A \frac{\ln(y)}{(x+y)^2} dxdy.$$

b) (2 puntos). Calcule la integral $\iint_D \ln(x^2+y^2)\, dxdy$ si D representa el siguiente conjunto:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}.$$

Solución. Para calcular la integral del apartado (a) se aplica el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\iint_A \frac{\ln(y)}{(x+y)^2} dxdy &= \int_1^2 \int_y^{2y} \frac{\ln(y)}{(x+y)^2} dx\ dy = \int_1^2 \left[\frac{-\ln(y)}{x+y}\right]_{x=y}^{x=2y} dy \\ &= \int_1^2 \frac{\ln(y)}{6y} dy = \left[\frac{1}{12}\ln^2(y)\right]_{y=1}^{y=2} = \frac{\ln^2(2)}{12}.\end{aligned}$$

Para calcular la integral del apartado (b) se hace un cambio de variable a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right) dxdy &= \int_1^2 \int_0^{\pi/2} \ln\left(r^2\cos^2(\alpha) + r^2\text{sen}^2(\alpha)\right) \cdot r\ d\alpha\ dr \\ &= \int_1^2 \frac{\pi}{2} r \ln\left(r^2\right) dr = \pi \int_1^2 r\ln(r)\, dr.\end{aligned}$$

A continuación se calcula una primitiva de la función $r\ln(r)$:

$$\int r\ln(r)\, dr = \frac{r^2}{2}\ln(r) - \int \frac{r}{2} dr = \frac{r^2}{2}\ln(r) - \frac{r^2}{4}.$$

Por tanto,

$$\iint_D \ln\left(x^2+y^2\right) dxdy = \pi \left[\frac{r^2}{2}\ln(r) - \frac{r^2}{4}\right]_{r=1}^{r=2} = \pi\left(2\ln(2) - \frac{3}{4}\right).$$

Ejercicio 3 (2 puntos). Se define la siguiente función en $\mathbb{R}^2$:

$$F(x,y) = \left(\frac{2x}{y^2+1}, \frac{-2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2} \right).$$

a) ¿Es F un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$? Justifique la respuesta.

b) Calcule la integral de línea $\int_\gamma F \cdot ds$ si $\gamma(t) = (t^3-1, t^6-t)$, $0 \leq t \leq 1$.

Solución. Sean F_1 y F_2 las dos componentes de la función F:

$$F_1(x,y) = \frac{2x}{y^2+1}, \qquad F_2(x,y) = \frac{-2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2}.$$

Las funciones F_1 y F_2 son de clase 1 en $\mathbb{R}^2$ y, además,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{-4xy}{(y^2+1)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y).$$

Esto implica que F es un campo conservativo. A continuación se calcula una función potencial de F. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $\nabla f = F$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = F_1(x,y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y).$$

Por tanto,

$$f(x,y) = \int F_1(x,y)\,dx = \int \frac{2x}{y^2+1} dx = \frac{x^2}{y^2+1} + g(y),$$

donde g es una función derivable definida en $\mathbb{R}$. Por una parte, la derivada de f respecto a y tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x^2y}{(y^2+1)^2} + g'(y).$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) = \frac{-2y(x^2+1)}{(y^2+1)^2} = \frac{-2x^2y}{(y^2+1)^2} - \frac{2y}{(y^2+1)^2}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} g'(y) &= \frac{-2y}{(y^2+1)^2}, \\ g(y) &= \frac{1}{y^2+1} + c \qquad (c \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Una función potencial de F es

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y^2+1} + g(y) = \frac{x^2+1}{y^2+1}.$$

La integral de línea de F se puede calcular ahora del siguiente modo:

$$\int_\gamma F \cdot ds = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(0,0) - f(-1,0) = 1 - 2 = -1.$$

Ejercicio 4 (2 puntos).

a) Calcule todas las soluciones complejas de la ecuación $\cos(z) = 2$.

b) Calcule la integral $\int_C \frac{e^{-z}}{z^2} dz$, donde C representa la circunferencia de ecuación $|z| = 3$.

Solución. Ecuación $\cos(z) = 2$:

$$\begin{aligned} \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} &= 2, \\ e^{jz} + e^{-jz} &= 4. \end{aligned}$$

Se multiplica la ecuación por e^{jz}:

$$e^{2jz} + 1 = 4e^{jz},$$

$$e^{2jz} - 4e^{jz} + 1 = 0,$$

$$\left(e^{jz} - 2\right)^2 = 3,$$

$$e^{jz} = 2 \pm \sqrt{3},$$

$$jz = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) + 2\pi n j \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$z = 2\pi n - j\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Para calcular la integral del apartado (b) se puede utilizar la fórmula integral de Cauchy para la derivada de la función $f(z) = e^{-z}$:

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{f(z)}{z^2} dz = \frac{1}{2\pi j} \int_C \frac{e^{-z}}{z^2} dz.$$

Entonces

$$\int_C \frac{e^{-z}}{z^2} dz = 2\pi j \cdot f'(0) = 2\pi j \cdot \left(-e^0\right) = -2\pi j.$$