Cálculo II
20 de enero de 2016

Ejercicio 1 (3 puntos). Se define la siguiente función en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3.$$

a) Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x,y,z) = (2,1,3)$.

b) Determine los máximos locales (o relativos), los mínimos locales y los puntos de silla de la función f.

c) Sean $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables con las propiedades siguientes:

$$u(0) = 2, \qquad u'(0) = 2, \qquad v(0) = 1, \qquad v'(0) = 1.$$

Calcule la derivada de la función $g(t) = f(u(t), v(t))$ en $t = 0$.

Solución. a) Derivadas parciales de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 3y^2.$$

Ecuación del plano tangente:

$$z = f(2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \cdot (x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \cdot (y-1),$$

$$z = 3 + 9(x-2) - 3(y-1).$$

b) En primer lugar se determinan los puntos críticos de f:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 3y^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = y \\ y^2 = x. \end{array} \right.$$

Entonces

$$y = x^2 = y^4, \qquad y^4 - y = 0, \qquad y\left(y^3 - 1\right) = 0.$$

Por tanto, $y = 0$ ó $y = 1$, con lo cual los puntos críticos de f son $(0,0)$ y $(1,1)$. A continuación se calcula la matriz hessiana de f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \qquad H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se deduce que f tiene un punto de silla en $(0,0)$ y un mínimo local en $(1,1)$.

c) Como $(u(0), v(0)) = (2,1)$, la derivada de $g(t) = f(u(t), v(t))$ en $t = 0$ es

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \cdot u'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) \cdot v'(0) = 9 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 15.$$

Ejercicio 2 (2 puntos). Calcule la integral $\iint_D y\ dxdy$, donde D es el siguiente subconjunto del plano:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x^2+y^2 \leq 1,\ \ x^2+y^2 \geq 2x\right\}.$$

Solución. El conjunto D está contenido en el primer cuadrante del plano. En primer lugar se determina el punto de corte de las circunferencias $x^2+y^2=1$ y $x^2+y^2=2x$ en el primer cuadrante:

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2=2x \\ x\geq 0,\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow (x,y) = \left(1/2, \sqrt{3}/2\right) = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right).$$

Para calcular la integral se aplica el teorema de Fubini:

$$\begin{aligned}\iint_D y\ dxdy &= \int_0^{1/2}\int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\ dydx = \int_0^{1/2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=\sqrt{2x-x^2}}^{y=\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^{1/2}\frac{1-2x}{2}\ dx = \left[\frac{x-x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1/2} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

La integral también se puede calcular utilizando coordenadas polares. El ángulo, que llamaremos α, varía entre $\pi/3$ y $\pi/2$. La distancia r de cada punto (x,y) al origen de coordenadas varía entre un valor mínimo (que depende de α) y 1. A continuación se determina el valor mínimo de r en función de α:

$$x^2+y^2=2x,$$
$$r^2\cos^2\alpha + r^2\operatorname{sen}^2\alpha = 2r\cos\alpha,$$
$$r = 2\cos\alpha.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\iint_D y\ dxdy &= \int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_{2\cos\alpha}^{1} r^2\operatorname{sen}\alpha\ drd\alpha = \int_{\pi/3}^{\pi/2}\left[\frac{r^3\operatorname{sen}\alpha}{3}\right]_{r=2\cos\alpha}^{r=1} d\alpha \\ &= \int_{\pi/3}^{\pi/2}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{3} - \frac{8\cos^3\alpha\operatorname{sen}\alpha}{3}\ d\alpha = \left[\frac{-\cos\alpha}{3} + \frac{2\cos^4\alpha}{3}\right]_{\alpha=\pi/3}^{\alpha=\pi/2} = \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

Ejercicio 3 (2 puntos). Se considera el siguiente subconjunto del plano:

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ \frac{1}{\sqrt{3}} x \leq y \leq \sqrt{3} x \right\}.$$

Se llama γ a la curva cerrada que forma el borde de A, orientada en sentido positivo. Calcule la siguiente integral de línea:

$$\int_\gamma \left(y^2 + \operatorname{arctg} x \right) dx + \left(e^y - x^2 \right) dy.$$

Solución. Se aplica el teorema de Green:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \left(y^2 + \operatorname{arctg} x \right) dx + \left(e^y - x^2 \right) dy &= \iint_A -2x - 2y \ dxdy \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_1^2 \left(-2r \cos\alpha - 2r \operatorname{sen}\alpha \right) r \ drd\alpha \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_1^2 -2r^2 \left(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \right) drd\alpha \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{-14}{3} \left(\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \right) d\alpha \\
&= \frac{14}{3} \left(1 - \sqrt{3} \right).
\end{aligned}$$

Ejercicio 4 (3 puntos). Se llama C a la circunferencia en el plano complejo con centro 0 y radio 1, orientada en sentido positivo.

a) Utilice el cambio de variable $z = e^{jt}$ para demostrar la siguiente igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t} dt = \frac{2}{j} \int_C \frac{1}{1+4z+z^2} dz.$$

b) Utilice el apartado anterior y el teorema de los residuos para calcular la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t} dt.$

Solución. La circunferencia C se puede parametrizar de la siguiente forma:

$$z = e^{jt} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{2}{j}\int_C \frac{1}{1+4z+z^2} dz &= \frac{2}{j}\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+4e^{jt}+e^{2jt}} je^{jt} dt = 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{-jt}+4+e^{jt}} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\frac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t} dt. \end{aligned}$$

Esto demuestra la igualdad del apartado (a).

A continuación se utiliza el teorema de los residuos para calcular las integrales anteriores. Las singularidades de la función

$$f(z) = \frac{1}{1+4z+z^2}$$

son $z = -2-\sqrt{3}$ y $z = -2+\sqrt{3}$. Como $-2-\sqrt{3} < -1$ y $-1 < -2+\sqrt{3} < 0$, se deduce que $z = -2+\sqrt{3}$ es la única singularidad de f en el interior de la curva C. El punto $z = -2+\sqrt{3}$ es cero simple del denominador y, por tanto, es un polo de orden 1 de la función f. El residuo de f en $z = -2+\sqrt{3}$ es

$$Res\left(f, -2+\sqrt{3}\right) = \lim_{z\to -2+\sqrt{3}} \frac{z-\left(-2+\sqrt{3}\right)}{1+4z+z^2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Entonces

$$\int_C \frac{1}{1+4z+z^2} dz = 2\pi j \cdot Res\left(f, -2+\sqrt{3}\right) = \frac{\pi j}{\sqrt{3}}.$$

Por último, se obtiene el valor de la integral real:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t} dt = \frac{2}{j}\int_C \frac{1}{1+4z+z^2} dz = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$