**APELLIDOS Y NOMBRE:**

**DNI:** **Titulación:**

---

**ASIGNATURA:** CÁLCULO II
**CONVOCATORIA:** EXTRAORDINARIA, 25-06-2014, **Duración del examen:** 2 horas 30'
**Fecha publicación notas:** 1-07-2014 **Fecha revisión examen:** 4-07-2014
Todos los problemas tienen la misma puntuación.

---

**Problema 1**. Se considera la siguiente función definida en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Calcular la derivada direccional de $f$ en el punto $(0,0)$ en la dirección de un vector unitario $v = (v_1, v_2)$ (es decir, $\|v\| = 1$).

b) Estudiar la continuidad de $f$.

**Solución Problema 1**

a)

$$D_{(v_1,v_2)}f(0,0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\lambda v_1, \lambda v_2) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\dfrac{2\lambda^3 v_1 v_2^2}{\lambda^2 v_1^2 + \lambda^4 v_2^4}}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{2\lambda^3 v_1 v_2^2}{\lambda^3 v_1^2 + \lambda^5 v_2^4}$$
$$= \lim_{\lambda\to 0} \frac{2v_1 v_2^2}{v_1^2 + \lambda^2 v_2^4} = \frac{2v_1 v_2^2}{v_1^2} = \frac{2v_2^2}{v_1}, \qquad \text{si } v_1 \neq 0$$

Calculemos ahora la derivada direccional de $f$ en el punto $(0,0)$ en la dirección de un vector unitario $(0, v_2)$

$$D_{(0,v_2)}f(0,0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(0, \lambda v_2) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{0}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0} 0 = 0$$

b) $f(x,y)$ es cociente de funciones polinómicas y el denominador, $x^2 + y^2$, es distinto de cero siempre que $(x,y) \neq (0,0)$. Entonces $f(x,y)$ es continua en todo $(x,y) \neq (0,0)$.
La función $f(x,y)$ será continua en $(0,0)$ si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.
Si calculamos el límite cuando $(x,y)$ tiende a $(0,0)$ a lo largo de la recta $x = 0$ obtenemos

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

Sin embargo, si calculamos el límite cuando $(x,y)$ tiende a $(0,0)$ a lo largo de la parábola $x = y^2$ resulta

$$\lim_{y\to 0} f(y^2, y) = \lim_{y\to 0} \frac{2y^4}{y^4 + y^4} = \lim_{y\to 0} 1 = 1$$

Como ambos límites son distintos, no existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y por tanto la función no puede ser continua en $(0,0)$.

**Problema 2.**

Sea $C$ la circunferencia en $\mathbb{R}^2$ de ecuación $x^2 + y^2 = 2x$ y sea $D$ el círculo limitado por $C$.

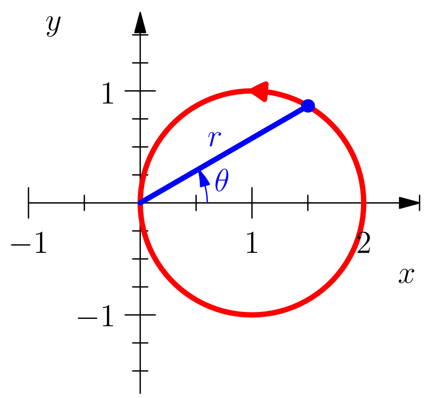
a) Calcular la integral $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$.

b) Calcular la integral $\int_C (x-1)dx + 2x\, dy$, donde $C$ está orientada en sentido positivo.

***Solución.*** La ecuación general de un círculo en el plano es $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, siendo $(a, b)$ su centro y $r$ su radio. En nuestro caso

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 - 2x + y^2 = 0, \quad x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0,$$
$$(x-1)^2 - 1 + y^2 = 0, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$$

luego se trata de un círculo centrado en $(1, 0)$ y de radio 1.




a) Pasando a polares $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$ obtenemos que

$$x^2 + y^2 = 2x, \qquad r^2\cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta = 2r\cos\theta, \qquad r^2 = 2r\cos\theta$$

es decir, $r = 2\cos\theta$ es la curva dada implícitamente en polares. Es importante observar que los ángulos mínimo y máximo subtendidos desde el origen del círculo $C$ corresponden a las dos semirrectas tangentes a $C$ en el origen, luego $\theta$ varía entre $-\pi/2$ y $+\pi/2$. Utilizando la fórmula de cambio a polares de la integral

$$\iint_D f(x, y)\, dxdy = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, rd\theta dr$$

tenemos en nuestro caso que

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy = \iint_{D'} r\, r d\theta dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\, dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{(2\cos\theta)^3}{3}\, d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\, d\theta = \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\operatorname{sen}^2\theta)\, d\operatorname{sen}\theta = \frac{8}{3}\left[\operatorname{sen}\theta - \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$= \frac{8}{3}\left[1-\frac{1}{3}-\left(-1-\frac{-1}{3}\right)\right] = \frac{32}{9}$$

b) Podemos parametrizar la circunferencia $C$ con $x(t)=1+\cos t$, $y(t)=\operatorname{sen} t$, $0\le t\le 2\pi$, quedando

$$\int_C (x-1)dx + 2x\, dy = \int_0^{2\pi} \cos t\, d(1+\cos t) + 2(1+\cos t)\, d\operatorname{sen} t$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos t(-\operatorname{sen} t)\, dt + 2(1+\cos t)\cos t\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} t\cos t\, dt + \int_0^{2\pi} 2\cos t\, dt + \int_0^{2\pi} 2\cos^2 t\, dt$$

$$= -\left[\frac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} + 2\left[\operatorname{sen} t\right]_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\, dt = 2\pi + \left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi$$

Quizás era más fácil usando la fórmula de Green

$$\int_C P\, dx + Q\, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

que implica que

$$\int_C (x-1)dx + 2x\, dy = \iint_D (2-0)\, dxdy = 2\iint_D dxdy = 2\pi$$

ya que $\iint_D dxdy$ es el área de $D$ que es $\pi R^2 = \pi$.

**APELLIDOS Y NOMBRE:**

**DNI:** **Titulación:**

---

**Problema 3**

Se considera la siguiente función de variable compleja $f(z) = \frac{z+\pi}{e^z - e^{-z}}$.

a) Calcular los polos de $f$ y su orden de multiplicidad.

b) Sea $\gamma$ la circunferencia en $\mathbb{C}$ con centro 0 y radio 1. Calcular la integral $\int_\gamma f(z)\, dz$.

**Solución Problema 3**

a) Buscamos los ceros del denominador, que serán las soluciones de

$$e^z - e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^z - \frac{1}{e^z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = 1$$

Portanto

$$2z = \log(1) = j2k\pi \Rightarrow \ z = jk\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Como la función es de la forma $f(z) = g(z)/h(z)$, $g(z_0) \neq 0$ para toda singularidad $z_0$ y $h'(z_0) = e^{z_0} + e^{z_0} \neq 0$ para toda singularidad $z_0$, entonces las singularidades son polos simples.

b) Dentro del circulo solo esta la singularidad $z_0 = 0$

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi j \mathrm{Res}(f(z), 0) = 2\pi j \frac{g(0)}{h'(0)} = 2\pi j \frac{\pi}{2} = \pi^2 j$$

Ya que

$$\mathrm{Res}(f(z), 0) = \lim_{z \to 0} \frac{g(z)}{h(z)}(z - 0) = \lim_{z \to 0} \frac{g(z) + zg'(z)}{h'(z)} = \frac{g(0)}{h'(0)} = \frac{0 + \pi}{e^0 + e^{-0}} = \frac{\pi}{2}$$