Asignatura: Cálculo II.

Fecha: 7-7-2015.

Publicación de notas: 14-7-2015.

Revisión del examen: 17-7-2015.

Duración: 3 horas.

Todos los problemas tienen la misma puntuación.

Problema 1. Se llama f a la siguiente función definida en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

b) Calcule las derivadas parciales de f en cada punto de $\mathbb{R}^2$.

c) Estudie si las derivadas parciales de f son continuas en $(0,0)$.

d) Para cada $t\in\mathbb{R}$ se define $g(t)=(te^t,\cos t)$. Calcule la matriz jacobiana de $g\circ f$ en el punto $(1,1)$.

Solución. Si $(x,y)\neq(0,0)$, entonces

$$0\leq|f(x,y)|=\frac{x^2}{x^2+y^2}\,|y|\leq|y|\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0.$$

Por tanto, $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$, es decir, f es continua en $(0,0)$.

A continuación se calcula la derivada parcial de f respecto a x. Si $(x,y)\neq(0,0)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy\left(x^2+y^2\right)-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Derivada parcial de f respecto a x en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0.$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

La función $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es continua en $(0,0)$ porque su límite a lo largo de la recta $y=x$ es distinto de $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^4}{\left(2x^2\right)^2}=\frac{1}{2}\neq\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,.$$

Ahora se calcula la derivada parcial de f respecto a y. Si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2\left(x^2+y^2\right) - 2x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^4 - x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Derivada parcial de f respecto a y en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La función $\frac{\partial f}{\partial y}$ tampoco es continua en $(0,0)$ porque su límite a lo largo de la recta $y=0$ es distinto de $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=0}} \frac{x^4 - x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{\left(x^2\right)^2} = 1 \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Las derivadas parciales de f son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, luego f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Además, la función g es derivable en todo $\mathbb{R}$ y su derivada es $g'(t) = (e^t + te^t, -\operatorname{sen} t)$. Por tanto, se puede aplicar la regla de la cadena para calcular la matriz jacobiana de $g \circ f$ en $(1,1)$:

$$\begin{aligned} J(g\circ f)(1,1) &= g'(f(1,1)) \cdot \nabla f(1,1) = g'(1/2) \cdot \nabla f(1,1) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{1/2} \\ -\operatorname{sen}(1/2) \end{pmatrix} \cdot (1/2, 0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{1/2} & 0 \\ \frac{-\operatorname{sen}(1/2)}{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Problema 2. Sea A la región de $\mathbb{R}^2$ limitada por las siguientes rectas y circunferencias:

$$y = 0, \qquad y = x, \qquad x^2 + y^2 = 2x, \qquad x^2 + y^2 = 4x.$$

Dibuje el conjunto A y calcule su área.

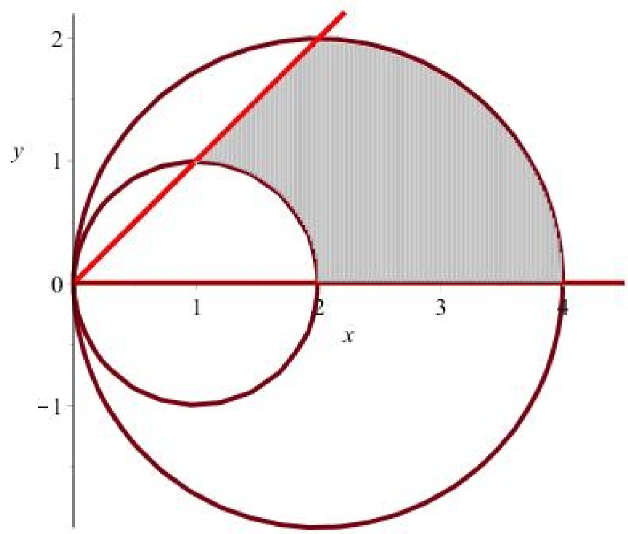
Solución. La circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ tiene centro $(1, 0)$ y radio 1:

$$x^2 + y^2 = 2x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-1)^2 + y^2 = 1.$$

La circunferencia $x^2 + y^2 = 4x$ tiene centro $(2, 0)$ y radio 2:

$$x^2 + y^2 = 4x \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

El conjunto A corresponde a la parte sombreada del siguiente gráfico:



El área de A es $\iint_A dxdy$. Para calcular esta integral se utilizarán coordenadas polares. El ángulo θ varía entre 0 y $\pi/4$. Para cada θ, la distancia al origen, que llamaremos r, varía entre dos valores que dependen de θ. El valor mínimo de r se alcanza cuando el punto $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$:

$$r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 2r\cos\theta,$$

$$r = 2\cos\theta.$$

El valor máximo de r se alcanza cuando $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ pertenece a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4x$:

$$r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta = 4r\cos\theta,$$

$$r = 4\cos\theta.$$

Por tanto,

$$\iint_A dxdy = \int_0^{\pi/4} \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r\ drd\theta = \int_0^{\pi/4} \left.\frac{r^2}{2}\right|_{r=2\cos\theta}^{r=4\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/4} 6\cos^2\theta\ d\theta.$$

Primitiva de la función $\cos^2\theta$:

$$\int \cos^2\theta d\theta = \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \int \operatorname{sen}^2\theta d\theta = \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \int 1 - \cos^2\theta d\theta = \operatorname{sen}\theta\cos\theta + \theta - \int \cos^2\theta d\theta,$$

$$\int \cos^2\theta\ d\theta = \frac{\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}.$$

El área de A es el siguiente valor:

$$\iint_A dxdy = 6\left.\frac{\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{2}\right|_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} = \frac{3\pi}{4} + \frac{3}{2}.$$

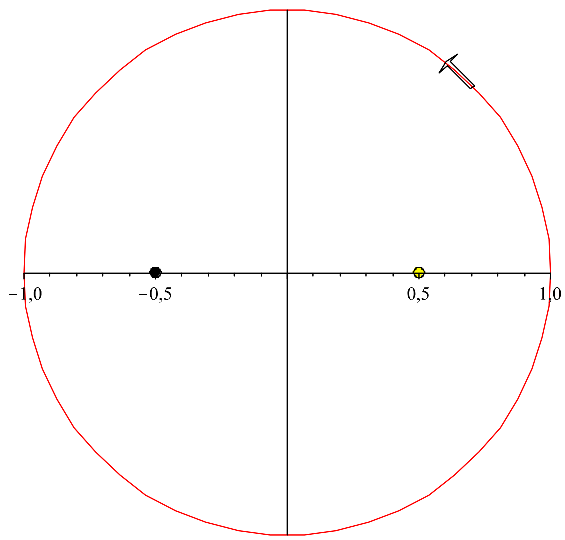
Problema 3. Se llama C a la circunferencia en el plano complejo con centro 0 y radio 1, orientada en sentido positivo. Calcule la siguiente integral:

$$\int_C \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{\cos\left(\pi z\right)}dz.$$

Solución. Las funciones $(z-1/2)^2$ y $h\left(z\right)=\cos\left(\pi z\right)$ son analíticas en $\mathbb{C}$. Por tanto, $f\left(z\right)=\frac{(z-1/2)^2}{\cos(\pi z)}=\frac{(z-1/2)^2}{h(z)}$ es analítica en $\mathbb{C}$ salvo en los ceros del denominador, que son los siguientes:

$$h\left(z\right)=\cos\left(\pi z\right)=0 \Leftrightarrow \pi z=\frac{\pi}{2}+n\pi \Leftrightarrow z=\frac{1}{2}+n \qquad \left(n\in\mathbb{Z}\right).$$

Los únicos ceros de h en el interior de la curva C son $z=1/2$ y $z=-1/2$:



Estos dos puntos son ceros simples del denominador:

$$h'\left(z\right)=-\pi\,\mathrm{sen}\left(\pi z\right), \qquad h'\left(1/2\right)=-\pi\neq 0, \qquad h'\left(-1/2\right)=\pi\neq 0.$$

Puesto que el numerador de f, $(z-1/2)^2$, tiene un cero doble en $z=1/2$, la función f tiene un cero simple en $z=1/2$. Como el numerador de f no se anula en $z=-1/2$, f tiene en $z=-1/2$ un polo simple (en negro en el dibujo). Si se aplica el teorema de los residuos se obtiene el siguiente resultado:

$$\int_C \frac{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{\cos\left(\pi z\right)}dz=2\pi j\cdot Res\left(f,-1/2\right)=2\pi j\cdot \lim_{z\to -1/2}\frac{\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2}{\cos\left(\pi z\right)}=2\pi j\cdot\frac{1}{\pi}=2j.$$