Cálculo II

29 de junio de 2017

Problema 1 *(3'5 puntos). Sea f la siguiente función definida en $\mathbb{R}^2$:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - x^2y - y^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad de f en $(0,0)$.

(b) Calcula las derivadas parciales de f, si existen, en $(0,0)$ y en cualquier punto $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, calcula la derivada direccional de f en $(0,0)$ en la dirección $v_\theta = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. A la vista de este resultado, determina por qué f no es diferenciable en $(0,0)$.

(d) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida como $g(x,y) = (1+x, y^2)$. Obtén la matriz jacobiana de $f \circ g$ en el punto $(0,0)$.

(e) Calcula la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x,y) = (1,0)$.

Solución.

(a) Para determinar el límite de f en $(0,0)$ se realiza un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \lim_{r\to 0} f(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha) &= \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\alpha - r^2\cos^2\alpha \cdot r\operatorname{sen}\alpha - r^3\operatorname{sen}^3\alpha}{r^2\cos^2\alpha + r^2\operatorname{sen}^2\alpha} \\ &= \lim_{r\to 0} r\left(\cos^3\alpha - \cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha\right). \end{aligned}$$

Como $(\cos^3\alpha - \cos^2\alpha\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}^3\alpha)$ está acotado y r tiende a cero, se obtiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

Es decir, la función f es continua en $(0,0)$.

(b) Derivadas parciales de f en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3}{t^2}}{t} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{-t^3}{t^2}}{t} = -1.$$

Derivadas parciales en un punto $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(3x^2-2xy)(x^2+y^2) - (x^3-x^2y-y^3)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(-x^2-3y^2)(x^2+y^2) - (x^3-x^2y-y^3)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^4-y^4-2x^3y-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

(c) Derivada de f en $(0,0)$ en la dirección $v_\theta = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$:

$$\begin{aligned}
D_{v_\theta} f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t^3\cos^3\theta - t^2\cos^2\theta\cdot t\operatorname{sen}\theta - t^3\operatorname{sen}^3\theta}{t^2\cos^2\theta + t^2\operatorname{sen}^2\theta}}{t} \\
&= \cos^3\theta - \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta = \cos^3\theta - \operatorname{sen}\theta\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) \\
&= \cos^3\theta - \operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Si la función f fuera diferenciable en $(0,0)$, para todo θ se cumpliría que $D_{v_\theta} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v_\theta$. Sin embargo, hemos calculado que $D_{v_\theta} f(0,0) = \cos^3\theta - \operatorname{sen}\theta$, mientras que

$$\nabla f(0,0) \cdot v_\theta = (1,-1) \cdot (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta.$$

En general, $\cos^3\theta - \operatorname{sen}\theta \neq \cos\theta - \operatorname{sen}\theta$ (por ejemplo, si $\theta = \frac{\pi}{3}$). Por tanto, f no es diferenciable en $(0,0)$.

(d) La matriz jacobiana de $g(x,y) = (1+x, y^2)$ es

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}.$$

Como las componentes de g tienen derivadas parciales continuas, se deduce que g es una función diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$. Además, las derivadas parciales de f son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y, por tanto, f es diferenciable en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$. Por la regla de la cadena se cumple que

$$J_{f\circ g}(0,0) = J_f(g(0,0)) \cdot J_g(0,0) = \nabla f(1,0) \cdot J_g(0,0) = (1,-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1,0).$$

(e) La ecuación del plano tangente en $(1,0)$ es

$$z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \cdot (x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \cdot y,$$

$$z = 1 + (x-1) - y,$$

$$z = x - y.$$

Problema 2 *(3 puntos).*

(a) *Calcula la integral de $F(x,y) = (x-y, x+y)$ a lo largo del segmento con origen en el punto $P=(1,0)$ y final en el punto $Q=(0,2)$.*

(b) *Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; 1 \leq x^2+y^2 \leq 9,\; y \geq 0\}$. Sea C la frontera del conjunto D, orientada en sentido positivo. Utilizando el teorema de Green, calcula la integral de línea*

$$\int_C \left(\operatorname{arctg}(x) - y^2\right) dx + \left(e^y + x^2\right) dy.$$

Solución.

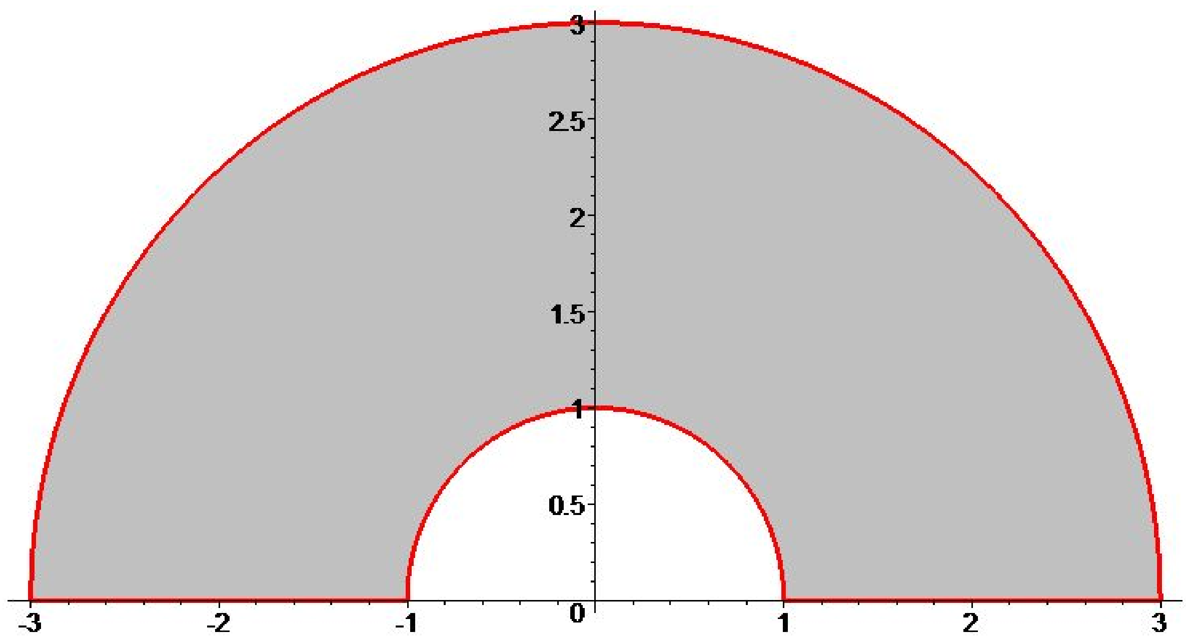
(a) Una parametrización del segmento $\overline{PQ}$ es

$$\gamma(t) = P + t(Q-P) = (1-t, 2t),$$

donde $0 \leq t \leq 1$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{PQ}} F \cdot ds &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 F(1-t, 2t) \cdot (-1,2)\, dt \\
&= \int_0^1 (1-t-2t, 1-t+2t) \cdot (-1,2)\, dt \\
&= \int_0^1 (5t+1)\, dt = \frac{5}{2}t^2 + t\Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

(b) El siguiente gráfico es una representación del conjunto D (en gris) y la curva C (en rojo):



Se aplicará el teorema de Green para transformar la integral de línea en una integral doble y, a continuación, se realizará un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\int_C \left(\operatorname{arctg}(x) - y^2\right) dx + \left(e^y + x^2\right) dy &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(e^y + x^2\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\operatorname{arctg}(x) - y^2\right)\right) dxdy \\
&= \iint_D (2x + 2y)\, dxdy = \int_0^\pi \int_1^3 \left(2r^2 \cos\theta + 2r^2 \operatorname{sen}\theta\right) drd\theta \\
&= \int_0^\pi (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \left.\frac{2r^3}{3}\right|_{r=1}^{r=3} d\theta = \frac{52}{3}\int_0^\pi (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \\
&= \frac{52}{3}\left[\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{104}{3}.
\end{aligned}$$

Problema 3 *(3'5 puntos).*

1. *Calcula el valor de la constante real k para que la función $u(x, y) = x^3 + kxy^2$ sea armónica en $\mathbb{R}^2$. Encuentra una función analítica (es decir, holomorfa) en $\mathbb{C}$ cuya parte real sea u.*

2. *Supongamos que $R > 0$ y que C es la circunferencia de centro 0 y radio R, recorrida una vez en sentido positivo. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $a \neq b$.*

   (a) Calcula $\displaystyle\int_C \frac{z+a}{z(z+b)} dz$ si $|b| < R$.

   (b) Calcula $\displaystyle\int_C \frac{z+a}{z(z+b)} dz$ si $|b| > R$.

Solución.

1. La función u es un polinomio y, por tanto, tiene derivadas parciales de todos los órdenes continuas en $\mathbb{R}^2$. Las derivadas parciales de primer y segundo orden de la función u son

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + ky^2, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2kxy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = 2ky, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 2kx.$$

La función es armónica en $\mathbb{R}^2$ si para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Es decir, $6x + 2kx = 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Por tanto, $k = -3$.

A continuación se determina una función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que

$$f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y) = x^3 - 3xy^2 + jv(x, y)$$

sea analítica en $\mathbb{C}$. Las funciones u y v deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 6xy.$$

Entonces

$$v(x, y) = \int \left(3x^2 - 3y^2\right) dy = 3x^2 y - y^3 + h(x),$$

donde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable que sólo depende de x. Además, para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que

$$6xy = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 6xy + h'(x).$$

Se deduce que $h'(x) = 0$ para todo x, es decir, h es constante. Por tanto, para todo $c \in \mathbb{R}$, la función

$$v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + c$$

tiene la propiedad de que $f(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ es analítica en $\mathbb{C}$. En efecto, u y v tienen derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$ por ser polinomios y, además, cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto. También se puede observar que

$$f(x + jy) = \left(x^3 - 3xy^2\right) + j\left(3x^2 y - y^3 + c\right) = (x + jy)^3 + cj.$$

Es decir, $f(z) = z^3 + cj$, que claramente es una función analítica en todo $\mathbb{C}$.

2. La función del integrando es racional y, por tanto, analítica salvo en las raíces del denominador, que son $z = 0$ y $z = -b$. Ambas son raíces simples del denominador (porque $b \neq 0$) y no anulan el numerador (porque $0 \neq a \neq b$), por lo que son polos simples del integrando. El residuo de la función en $z = 0$ es

$$Res\left(\frac{z+a}{z(z+b)}, 0\right) = \lim_{z\to 0}\left(z \cdot \frac{z+a}{z(z+b)}\right) = \frac{a}{b}.$$

El residuo en $z = -b$ es

$$Res\left(\frac{z+a}{z(z+b)}, -b\right) = \lim_{z\to -b}\left((z+b) \cdot \frac{z+a}{z(z+b)}\right) = \frac{b-a}{b}.$$

(a) Si $|b| < R$, los dos polos, 0 y $-b$, se encuentran en el interior de C. Aplicando el teorema de los residuos se obtiene

$$\begin{aligned}\int_C \frac{z+a}{z(z+b)}dz &= 2\pi j\left(Res\left(\frac{z+a}{z(z+b)}, 0\right) + Res\left(\frac{z+a}{z(z+b)}, -b\right)\right) \\ &= 2\pi j\ \left(\frac{a}{b} + \frac{b-a}{b}\right) = 2\pi j.\end{aligned}$$

(b) Si $|b| > R$, entonces $z = 0$ está en el interior de la curva y $z = -b$ en el exterior. Aplicando el teorema de los residuos se obtiene

$$\int_C \frac{z+a}{z(z+b)}dz = 2\pi j\ Res\left(\frac{z+a}{z(z+b)}, 0\right) = 2\pi j\ \frac{a}{b}.$$