Cálculo II

Fecha: 29-6-2018. **Duración**: 3 horas.
Publicación de notas: 16-7-2018. **Revisión**: 19-7-2018.
Las respuestas deben estar correctamente redactadas y justificadas.

Ejercicio 1. (3.5 puntos). Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + e^{xy^2} + 1 - e.$$

a) Calcula las derivadas parciales de f.

b) Halla la derivada direccional de f en el punto $(1,-1)$ en la dirección $v = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

c) Demuestra que, en un entorno de $(1,1)$, la ecuación $f(x,y) = 0$ define implícitamente a y como función de x y calcula $y'(1)$.

d) Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la función

$$g(x,y,z) = (\operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y+z), \cos(y) + \operatorname{sen}(z)).$$

Halla el gradiente de $f \circ g$ en el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0, 0\right)$.

Solución.
a) Las derivadas parciales de f son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4x + y^2 e^{xy^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xye^{xy^2}.$$

b) Las derivadas parciales de f son continuas en todo $\mathbb{R}^2$. Por tanto, f es diferenciable en todo punto y la derivada direccional se puede calcular del siguiente modo:

$$D_v f(1,-1) = \nabla f(1,-1) \cdot v = (e, -2e) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{(\sqrt{3}-2)e}{2}.$$

c) La función f es de clase 1 en todo $\mathbb{R}^2$ y cumple, además, que $f(1,1) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2e \neq 0$. Por el teorema de la función implícita, existe $\varepsilon > 0$ y existe una función $y(x)$ tal que $y(1) = 1$ y $f(x, y(x)) = 0$ si $1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$. Es decir, para estos valores de x se cumple que

$$x^4 - 2x^2 + e^{xy^2(x)} + 1 - e = 0.$$

A continuación derivamos los dos miembros de la ecuación anterior. Si $1 - \varepsilon < x < 1 + \varepsilon$, entonces

$$4x^3 - 4x + (y^2(x) + 2xy(x)y'(x))e^{xy^2(x)} = 0.$$

Evaluamos la ecuación anterior en $x = 1$:

$$(y^2(1) + 2y(1)y'(1))e^{y^2(1)} = 0.$$

A continuación utilizamos que $y(1) = 1$:

$$(1 + 2y'(1))e = 0.$$

Por tanto, $y'(1) = -1/2$.

d) La matriz jacobiana de g en un punto (x,y,z) es

$$Jg(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos(x) & \cos(y+z) & \cos(y+z) \\ 0 & -\operatorname{sen}(y) & \cos(z) \end{pmatrix}.$$

Observamos que las derivadas parciales de las dos componentes de g son continuas en todo punto y, por tanto, g es diferenciable en todo punto. Se puede aplicar entonces la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \nabla(f \circ g)(\pi/2, 0, 0) &= \nabla f(g(\pi/2,0,0)) \cdot Jg\,(\pi/2,0,0) = \nabla f(1,1) \cdot Jg\,(\pi/2,0,0) \\ &= (e, 2e) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0, e, 3e). \end{aligned}$$

Ejercicio 2. (3 puntos).

a) Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq x,\ y \geq x - 6,\ xy \leq 16\}$. Calcula la integral doble

$$\iint_D \frac{x}{y}\, dxdy.$$

b) Sea C la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1, con orientación positiva. Calcula la integral de línea

$$\int_C (e^x - y^3)dx + (x^3 + \cos y)dy.$$

Solución.

a) Las rectas $y = 1$ e $y = x$ se cortan en el punto $(1, 1)$. Las rectas $y = 1$ e $y = x - 6$ se cortan en el punto $(7, 1)$. La recta $y = x$ y la hipérbola $xy = 16$ se cortan (en el primer cuadrante) en el punto $(4, 4)$. La recta $y = x - 6$ y la hipérbola $xy = 16$ se cortan (en el primer cuadrante) en el punto $(8, 2)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{y}\, dxdy &= \int_1^2 \int_y^{y+6} \frac{x}{y}\, dxdy + \int_2^4 \int_y^{16/y} \frac{x}{y}\, dxdy = \int_1^2 \left.\frac{x^2}{2y}\right|_y^{y+6} dy + \int_2^4 \left.\frac{x^2}{2y}\right|_y^{16/y} dy \\
&= \int_1^2 \left(6 + \frac{18}{y}\right) dy + \int_2^4 \left(\frac{128}{y^3} - \frac{y}{2}\right) dy \\
&= [6y + 18 \ln y]_1^2 + \left[-\frac{64}{y^2} - \frac{y^2}{4}\right]_2^4 = 15 + 18 \ln 2.
\end{aligned}$$

b) Llamamos D al círculo limitado por C. Aplicaremos el teorema de Green para transformar la integral de línea en una integral doble y a continuación realizaremos un cambio a coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\int_C (e^x - y^3)dx \quad &+ \quad (x^3 + \cos y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + \cos y) - \frac{\partial}{\partial y}(e^x - y^3)\right) dxdy \\
&= \iint_D (3x^2 + 3y^2)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (3r^2 \cos^2 \alpha + 3r^2 \operatorname{sen}^2 \alpha) r\, d\alpha dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} 3r^3\, d\alpha dr = \int_0^1 6\pi r^3\, dr = \frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Ejercicio 3. (3.5 puntos).

a) Determina una función $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que $f(x+jy) = x^3 - 3xy^2 + jv(x,y)$ sea derivable en todo punto $x + jy \in \mathbb{C}$ y, además, cumpla que $f(0) = j$.

b) Calcula todas las soluciones complejas de la ecuación $\cos z = j$.

c) Calcula la integral de la función $g(z) = \dfrac{z+1}{z^3 - 2z^2}$ a lo largo de las siguientes curvas en $\mathbb{C}$:

   i) La curva γ_1 de ecuación $|z| = 3$, con orientación positiva.

   ii) La curva γ_2 de ecuación $|z - 2 - j| = 2$, con orientación positiva.

Solución.
a) Sea $u(x,y) = x^3 - 3xy^2$. La función v debe ser diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y, además, u y v deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 6xy.$$

La segunda ecuación implica que

$$v(x,y) = \int 6xy\,dx = 3x^2y + \varphi(y),$$

donde φ es una función de una única variable. Entonces

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 3x^2 + \varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2.$$

Por tanto, $\varphi'(y) = -3y^2$, luego $\varphi(y) = -y^3 + c$ para algún $c \in \mathbb{R}$. Entonces

$$v(x,y) = 3x^2y - y^3 + c.$$

Las funciones u y v son diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ por ser polinomios y, además, cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto. Por tanto, $f(x+jy) = u(x,y) + jv(x,y)$ es derivable en todo punto $x + jy \in \mathbb{C}$. A continuación se impone la condición $f(0) = j$:

$$j = f(0) = u(0,0) + jv(0,0) = jc.$$

Por tanto, $c = 1$ y la función f es

$$f(x+jy) = (x^3 - 3xy^2) + j(3x^2y - y^3 + 1).$$

b) Ecuación $\cos z = j$:

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = j \Leftrightarrow e^{jz} + e^{-jz} = 2j \Leftrightarrow e^{2jz} - 2je^{jz} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ e^{jz} &= \frac{2j \pm \sqrt{-4-4}}{2} = \frac{2j \pm 2\sqrt{2}j}{2} = \left(1 \pm \sqrt{2}\right) j. \end{aligned}$$

Si $e^{jz} = \left(1 + \sqrt{2}\right) j$, entonces

$$jz = \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + j\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - j\ln\left(1 + \sqrt{2}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Si $e^{jz} = \left(1-\sqrt{2}\right) j$, entonces

$$jz = \ln\left|1-\sqrt{2}\right| + j\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = \ln\left(\sqrt{2}-1\right) + j\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}),$$

$$z = 2\pi n - \frac{\pi}{2} - j\ln\left(\sqrt{2}-1\right) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

c) Las únicas singularidades de la función

$$g(z) = \frac{z+1}{z^3-2z^2} = \frac{z+1}{z^2(z-2)}$$

son $z=0$, que es un polo doble, y $z=2$, que es un polo simple. Calculamos el residuo en cada singularidad:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} g(z) = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2 g(z)\right] = \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{z+1}{z-2}\right] = \lim_{z\to 0}\frac{(z-2)-(z+1)}{(z-2)^2} = \frac{-3}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=2} g(z) = \lim_{z\to 2}(z-2)g(z) = \lim_{z\to 2}\frac{z+1}{z^2} = \frac{3}{4}.$$

Por último, las integrales se calcula aplicando el teorema de los residuos. Como $z=0$ y $z=2$ se encuentran en el interior de γ_1, se cumple que

$$\int_{\gamma_1} g(z)dz = 2\pi j\left[\operatorname*{Res}_{z=0} g(z) + \operatorname*{Res}_{z=2} g(z)\right] = 2\pi j\left(\frac{-3}{4}+\frac{3}{4}\right) = 0.$$

El punto $z=2$ es la única singularidad en el interior de γ_2 y, por tanto,

$$\int_{\gamma_2} g(z)dz = 2\pi j\cdot\operatorname*{Res}_{z=2} g(z) = \frac{3\pi j}{2}.$$