APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: **Titulación:**

ASIGNATURA: CÁLCULO II (Examen Común Evaluación Continua)
CONVOCATORIA: JUNIO, 3 de Junio de 2014, **Duración del examen:** 2 horas 30'
Fecha publicación notas: 10-06-2014 **Fecha revisión examen:** 13-06-2014
Todos los problemas tienen la misma puntuación.

Problema 1.

a) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable y sea $g(x,y)$ una función definida por

$$g(x,y)=xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

Calcula una función $H(x,y)$ que verifique $x^2\frac{\partial g}{\partial x}-y^2\frac{\partial g}{\partial y}=H(x,y)g(x,y)$.

b) Sea $\phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una función diferenciable en $(0,0,0)$ tal que $\phi(0,0,0)=(1,1,0)$, cuya matriz Jacobiana en $(0,0,0)$ es:

$$(\mathcal{J}\phi)(0,0,0)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}.$$

Sea $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $\varphi(x,y,z)=e^{xyz}$. Calcula el gradiente de la función $\varphi\circ\phi$ en $(0,0,0)$.

Solución. En primer lugar se calculan las derivadas parciales de la función g:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=yf\left(\frac{x+y}{xy}\right)+xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\cdot\frac{xy-(x+y)\,y}{x^2y^2}=yf\left(\frac{x+y}{xy}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=xf\left(\frac{x+y}{xy}\right)+xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\cdot\frac{xy-(x+y)\,x}{x^2y^2}=xf\left(\frac{x+y}{xy}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x+y}{xy}\right).$$

Entonces

$$\begin{aligned}x^2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-y^2\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \left[x^2yf\left(\frac{x+y}{xy}\right)-xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\right]-\left[xy^2f\left(\frac{x+y}{xy}\right)-xyf'\left(\frac{x+y}{xy}\right)\right]\\ &= \left(x^2y-xy^2\right)f\left(\frac{x+y}{xy}\right)=xy\,(x-y)\,f\left(\frac{x+y}{xy}\right)\\ &= (x-y)\,g\,(x,y)\,.\end{aligned}$$

La función H debe cumplir la siguiente ecuación:

$$x^2\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)-y^2\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=H\,(x,y)\,g\,(x,y)\,.$$

Es decir,

$$(x-y)\,g\,(x,y)=H\,(x,y)\cdot g\,(x,y)\,.$$

Por tanto, $H(x, y) = x - y$ cumple la ecuación del enunciado.

El gradiente de φ es el siguiente:

$$\nabla\varphi(x, y, z) = \left(yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz}\right).$$

Las derivadas parciales de φ son continuas en todo $\mathbb{R}^3$, luego φ es una función diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$. Además, ϕ es diferenciable en $(0, 0, 0)$. Por tanto, se puede aplicar la regla de la cadena para calcular el gradiente de $\varphi \circ \phi$ en $(0, 0, 0)$:

$$\begin{aligned} \nabla(\varphi \circ \phi)(0,0,0) &= \nabla\varphi(\phi(0,0,0)) \cdot J\phi(0,0,0) = \nabla\varphi(1,1,0) \cdot J\phi(0,0,0) \\ &= (0,0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1,0,1). \end{aligned}$$

Problema 2. *Se considera el campo vectorial*

$$F_N(x,y) = \big(y + xy^2, x + Nx^2y\big)\, e^{xy}, \quad N \in \mathbb{R}.$$

Sea γ la curva de ecuación $\alpha(t) = (t, e^t)$, $0 \le t \le 1$, y sea Γ el segmento de ecuación $\beta(t) = (1,t)$, $-1 \le t \le 1$.

i) Calcula $\displaystyle\int_\gamma F_1 \cdot d\alpha$, *ii) Calcula* $\displaystyle\int_\Gamma F_N \cdot d\beta$ *para* $N \neq 1$.

Solución. *i)* Sean $P_1(x,y) = (y+xy^2)e^{xy}$ y $Q_1(x,y) = (x+x^2y)e^{xy}$ las componentes del campo $F_1(x,y)$. Como son producto de polinomios por una función exponencial, tienen derivadas parciales continuas en todo punto de $\mathbb{R}^2$ y además

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}(x,y) = (1 + 3xy + x^2y^2)e^{xy} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}(x,y) \quad \text{en todo } (x,y).$$

Como consecuencia, $F_1(x,y)$ es un gradiente en todo $\mathbb{R}^2$, es decir, existe $\varphi(x,y)$ tal que

$$P_1(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y), \qquad Q_1(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y), \qquad \text{en todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Haciendo integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = (y+xy^2)e^{xy} \Rightarrow \varphi(x,y) = \int (y+xy^2)e^{xy}dx &= (y+xy^2)\frac{e^{xy}}{y} - \int \frac{e^{xy}}{y}y^2dx + \Phi(y)\\ &= (1+xy-1)e^{xy} = xye^{xy} + \Phi(y). \qquad (1)\end{aligned}$$

Como $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)$ tiene que ser $Q_1(x,y)$, derivando con respecto a y en la expresión (1) obtenemos

$$(x+x^2y)e^{xy} + \Phi'(y) = Q_1(x,y) \Rightarrow \Phi'(y) = 0 \Rightarrow \Phi(y) = C.$$

Entonces

$$\varphi(x,y) = xye^{xy} + C.$$

Como la integral *i)* es independiente del camino y los puntos inicial y final son $\alpha(0) = (0,1)$ y $\alpha(1) = (1,e)$ tenemos

$$\int_\gamma F_1 \cdot d\alpha = \varphi(1,e) - \varphi(0,1) = e^{1+e}.$$

ii) Cuando $N \neq 1$ el campo $F_N(x,y)$ no es un gradiente en ningún abierto del plano porque

$$\frac{\partial P_N}{\partial y}(x,y) = (1+3xy+x^2y^2)e^{xy}, \qquad \frac{\partial Q_N}{\partial x}(x,y) = (1+(2N+1)xy+Nx^2y^2)e^{xy}$$

que son iguales únicamente cuando $N = 1$. Por lo tanto, la integral *ii)* depende del camino y tiene que calcularse por el segmento $\beta(t)$. Tenemos

$$\int_\Gamma F_N \cdot d\beta = \int_{-1}^{1} F_N(\beta(t)) \cdot \beta'(t)dt = \int_{-1}^{1} (P_N(1,t), Q_N(1,t)) \cdot (0,1)\ dt$$

$$= \int_{-1}^{1} Q_N(1,t)\ dt = \int_{-1}^{1} (1+Nt)e^t\, dt = (1+Nt)e^t\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Ne^t\, dt = e + (2N-1)e^{-1}.$$

$\square$

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: **Titulación:**

Problema 3.

a) Calcula $\int_\gamma f(z)dz$ siendo $f(z) = \overline{z}Re(z)$ y γ el arco menor de la circunferencia $|z| = 2$ desde $z_1 = 2$ a $z_2 = 2j$.

b) Calcula $\int_\beta g(z)dz$, siendo $g(z) = \dfrac{e^z}{(z+j\pi)^n}$ con $n \in \mathbb{N}$, y β la curva $|z - j\pi| = \dfrac{3\pi}{2}$, recorrida en sentido positivo.

c) Calcula $\int_\beta g(z)dz$, siendo $g(z) = \dfrac{e^z}{(z+j\pi)^n}$ con $n \in \mathbb{N}$, y β la curva $|z + 2j\pi| = \dfrac{3\pi}{2}$, recorrida en sentido negativo.

Solución.

a) Parametrización: $z(t) = 2e^{jt},\ t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{2e^{-jt}2cos(t)}_{f(z(t))}\underbrace{2je^{jt}}_{z'(t)}dt = 8j$$

b) $g(z)$ tiene un polo de orden n en $z = -j\pi$.

$$Res_{z=-j\pi}g = \frac{1}{(n-1)!}lim_{z\to -j\pi}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(g(z)(z+j\pi)^n) = \frac{1}{(n-1)!}lim_{z\to -j\pi}e^z = \frac{-1}{(n-1)!}$$

Como $g(z)$ es analítica en todos los puntos del contorno de β y en su interior, entonces

$$\int_\beta g(z)dz = 0.$$

c) Por el Teorema de los Residuos,

$$\int_\beta g(z)dz = -2\pi j Res_{z=-j\pi}g = -2\pi j\frac{-1}{(n-1)!} = \frac{2\pi j}{(n-1)!}.$$