Cálculo II

8 de junio de 2016

Publicación de notas: 13-6-2016. **Revisión del examen**: 16-6-2016.

Problema 1 (3 puntos). Se define la siguiente función en $\mathbb{R}^2$:

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

(a) Calcula la derivada de f en el punto $(1,0)$ en la dirección del vector $w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(b) Escribe la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(x,y) = (1,0)$.

(c) Determina los máximos locales, los mínimos locales y los puntos de silla de f.

(d) Sean $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables con las propiedades siguientes:

$$u(0) = 1, \qquad u'(0) = 2, \qquad v(0) = 0, \qquad v'(0) = 3.$$

Calcula la derivada de la función $g(t) = f(u(t), v(t))$ en $t = 0$.

Solución. (a) En primer lugar se calculan las derivadas parciales de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x.$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, se deduce que f es diferenciable en todo punto. Por tanto, la derivada de f en el punto $(1,0)$ en la dirección de w se puede calcular del siguiente modo:

$$D_w f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot w = (4,-4) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} - 2.$$

(b) Ecuación del plano tangente:

$$z = f(1,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\, y = 1 + 4(x-1) - 4y,$$

$$z = 4x - 4y - 3.$$

(c) En primer lugar se determinan los puntos críticos de f:

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x = 0 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$

Entonces

$$x = y^3 = x^9,$$

$$x^9 - x = x\left(x^8 - 1\right) = 0.$$

Por tanto, $x = 0$ ó $x = 1$ ó $x = -1$, con lo cual los puntos críticos de f son $(0,0)$, $(1,1)$ y $(-1,-1)$. La matriz hessiana de f es

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}.$$

Matriz hessiana en los puntos críticos:

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{pmatrix} = H_f(-1,-1).$$

Como $\det(H_f(0,0)) < 0$, se deduce que f tiene un punto de silla en $(0,0)$. Como $\det(H_f(1,1)) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) > 0$, se obtiene que f tiene un mínimo local en $(1,1)$. Igualmente, $\det(H_f(-1,-1)) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) > 0$, por lo que f también tiene un mínimo local en $(-1,-1)$.

(d) Derivada de $g(t) = f(u(t), v(t))$ en $t = 0$:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u(0), v(0)) \cdot u'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(u(0), v(0)) \cdot v'(0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \cdot 2 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) \cdot 3 = 4 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -4. \end{aligned}$$

Problema 2 (2 puntos).

1. Se considera la integral doble $\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\right)dx$, en la que f representa una función continua en $\mathbb{R}^2$.

   (a) Determina la región de integración.

   (b) Expresa la integral en el otro orden de integración posible al utilizar coordenadas cartesianas.

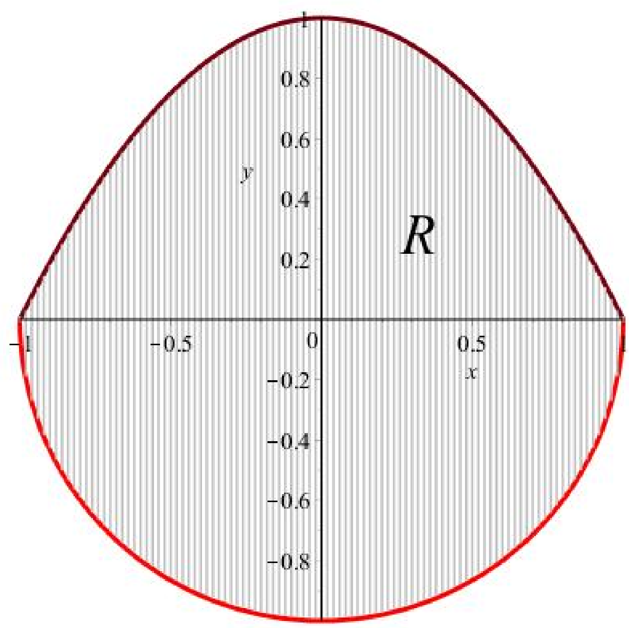
2. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y \geq 0, \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\}$.

   (a) Representa gráficamente el conjunto D e indica claramente los bordes que lo limitan.

   (b) Calcula la integral $\iint_D (x^2 + 3y^2)\,dxdy$ utilizando un cambio a coordenadas polares.

Solución. 1. Para calcular los límites del recinto de integración R observamos que $y = 1 - x^2$ es una parábola que tiene el máximo en el punto $(0,1)$ y que corta al eje de abscisas en $x = -1$ y $x = 1$. Ésta es la curva que delimita el recinto de integración en su parte superior.

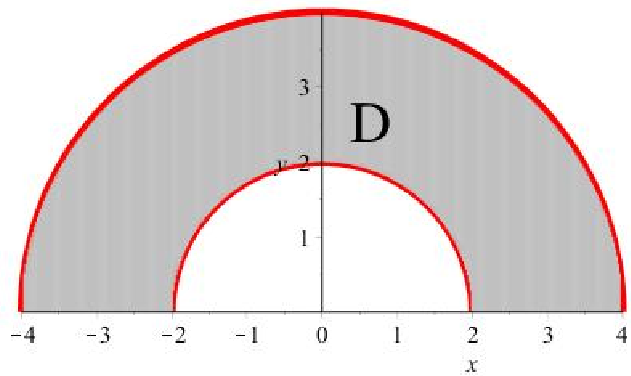
Si elevamos al cuadrado la expresión $y = -\sqrt{1-x^2}$, obtenemos $y^2 = 1 - x^2$, que es la ecuación de la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1, por lo que $y = -\sqrt{1-x^2}$, con $-1 \leq x \leq 1$, es la semicircunferencia inferior. El recinto de integración R es la zona sombreada de la siguiente figura:



La variable y recorre el intervalo $[-1,1]$. Fijado un valor de y entre -1 y 0 y despejando x en la ecuación $y^2 = 1 - x^2$, tenemos que x varía desde $-\sqrt{1-y^2}$ hasta $+\sqrt{1-y^2}$. Si y pertenece al intervalo $[0,1]$ y se despeja x en $y = 1 - x^2$, tenemos que x varía desde $-\sqrt{1-y}$ hasta $+\sqrt{1-y}$. Por tanto,

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\right)dx = \int_{-1}^{0}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx\right)dy + \int_{0}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

2. Por ser $y \geq 0$, el conjunto D se encuentra en el semiplano superior. Las curvas $x^2+y^2=4$ y $x^2+y^2=16$ son dos circunferencias centradas en $(0,0)$ de radios 2 y 4, respectivamente. Por tanto, D es la mitad de la corona circular comprendida entre ambas circunferencias y situada en el semiplano superior:



Para calcular la integral del enunciado se utilizarán coordenadas polares. El radio, que llamaremos ρ, varía entre 2 y 4, mientras que el ángulo, que llamaremos α, varía entre 0 y π. El valor absoluto del jacobiano de la transformación es ρ, por lo que

$$\begin{aligned}
\iint_D \left(x^2+3y^2\right) dxdy &= \int_2^4 \int_0^\pi \left(\rho^2 \cos^2(\alpha) + 3\rho^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)\right) \rho \, d\alpha d\rho \\
&= \int_2^4 \rho^3 \int_0^\pi \left(1 + 2\operatorname{sen}^2(\alpha)\right) d\alpha d\rho = \int_2^4 \rho^3 \int_0^\pi \left(1 + 2\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}\right) d\alpha d\rho \\
&= \int_2^4 \rho^3 \int_0^\pi (2 - \cos(2\alpha))\, d\alpha d\rho = \int_2^4 \rho^3 \left[2\alpha - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\alpha)\right]_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} d\rho \\
&= 2\pi \int_2^4 \rho^3 \, d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4}\Big|_2^4 = 120\pi.
\end{aligned}$$

Problema 3 (2 puntos). Se considera el campo vectorial

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)) = \left(2x + y^2 + kx^2y, \quad 2xy + x^3\right),$$

donde k representa una constante real.

(a) Determina el valor de k para que F sea un campo conservativo en $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcula la integral de línea $\int_\gamma F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$ cuando F es un campo conservativo y γ representa la curva de ecuación $y = x \operatorname{sen} x$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(\pi, 0)$.

(c) Calcula la integral de línea $\int_\gamma F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$ cuando k es un número real cualquiera y γ es la curva de ecuación $y = x$ desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(1,1)$.

Solución. (a) F_1 y F_2 tienen derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$ por ser funciones polinómicas y verifican

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = 2y + kx^2, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = 2y + 3x^2.$$

Entonces $\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$ si y sólo si $k = 3$. Por tanto, como $\mathbb{R}^2$ es simplemente conexo, si $k = 3$ se tendrá que F es conservativo.

(b) Según se ha demostrado en el apartado anterior, F es conservativo si y sólo si $k = 3$. En ese caso, existe un campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x,y) = F(x,y)$ en todo $\mathbb{R}^2$, es decir,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(2x + y^2 + 3x^2y,\ 2xy + x^3\right).$$

Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y^2 + 3x^2y$, se cumple que

$$f(x,y) = \int \left(2x + y^2 + 3x^2y\right) dx = x^2 + xy^2 + x^3y + \varphi(y),$$

donde φ es una función derivable en $\mathbb{R}$. Por tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + x^3 + \frac{d\varphi}{dy}(y).$$

Como también $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = F_2(x,y) = 2xy + x^3$, se deduce que $\frac{d\varphi}{dy}(y) = 0$ para todo y, luego φ es constante. En consecuencia, para todo $c \in \mathbb{R}$, la función

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + x^3y + c$$

tiene la propiedad de que $\nabla f = F$. Como F es conservativo, la integral de línea no depende de la curva, sino sólo de sus extremos y se puede calcular del siguiente modo:

$$\int_\gamma F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy = f(\pi, 0) - f(0,0) = \pi^2.$$

(c) La curva de ecuación $y = x$ desde $(0,0)$ hasta $(1,1)$ se puede parametrizar como $x = t$, $y = t$, con $t \in [0,1]$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy &= \int_0^1 \left(2t + t^2 + kt^2 \cdot t + 2t \cdot t + t^3\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(2t + 3t^2 + (1+k)\,t^3\right) dt \\
&= \frac{9+k}{4}.
\end{aligned}$$

Problema 4 (3 puntos).

1. Determina una función $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que $F(x + jy) = u(x, y) + j(x^2 - y^2)$ sea una función analítica (es decir, holomorfa) en todo $\mathbb{C}$.
2. Se llama f a la siguiente función de variable compleja:
$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 (z + 2)^2}.$$
   (a) Determina todos los polos de f en el plano complejo y el orden de cada uno de ellos.
   (b) Calcula el residuo de f en cada polo.
   (c) Calcula la integral de f a lo largo de la circunferencia C de ecuación $|z| = 3$ orientada en sentido positivo.

Solución. 1. Se define $v(x, y) = x^2 - y^2$. Para que $F(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ sea derivable en todo punto $x + jy \in \mathbb{C}$, las funciones u y v deben cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann:
$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -2y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -2x.$$
Entonces
$$u(x, y) = \int -2y dx = -2xy + \varphi(y),$$
donde $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función derivable. Además,
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2x + \varphi'(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -2x.$$
Se deduce que $\varphi'(y) = 0$ para todo y, luego φ es constante. Por tanto, si $k \in \mathbb{R}$, las funciones
$$u(x, y) = -2xy + k, \qquad v(x, y) = x^2 - y^2$$
tienen derivadas parciales continuas y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en todo punto, luego $F(x + jy) = u(x, y) + jv(x, y)$ es una función analítica en todo $\mathbb{C}$.

2. Las funciones $g(z) = e^z - 1$ y $h(z) = z^2 (z + 2)^2$ son derivables en todo $\mathbb{C}$. Por tanto, las únicas singularidades de $f = g/h$ son los puntos en los que se anula h, es decir, $z = 0$ y $z = -2$. El punto $z = 0$ es un cero simple de g y un cero doble de h. Por tanto, f tiene un polo simple en $z = 0$. Además, h tiene un cero doble en $z = -2$ y $g(-2) \neq 0$, por lo que f tiene un polo doble en $z = -2$. Las dos singularidades se encuentran en el interior de la circunferencia C.

El residuo de f en $z = 0$ es
$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z - 1}{z (z + 2)^2} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(z + 2)^2 + 2z (z + 2)} = \frac{1}{4}.$$
El residuo de f en $z = -2$ es
$$\begin{aligned} \operatorname*{Res}_{z=-2} f(z) &= \lim_{z\to -2} \frac{d}{dz} \left[(z + 2)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to -2} \frac{d}{dz} \left[\frac{e^z - 1}{z^2}\right] \\ &= \lim_{z\to -2} \frac{z^2 e^z - 2z (e^z - 1)}{z^4} = \frac{8e^{-2} - 4}{16} = \frac{e^{-2}}{2} - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$
Por último, la integral se calcula aplicando el teorema de los residuos:
$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi j \left[\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-2} f(z)\right] = \frac{\pi j}{e^2}.$$