EXAMEN FINAL DE CÁLCULO II

Fecha: 3 de junio de 2019 Duración: 2 horas y 30 minutos

APELLIDOS:

NOMBRE: **GRUPO:**

Ejercicio 1. (2 puntos) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=\left(xy,\ \sqrt{x^2+y^2}\right)$ y sea

$$g(u,v)=\begin{cases} u^2/v & \text{si} \quad v\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad v=0\end{cases}$$

(a) Calcular, si existen, las derivadas parciales de las componentes de f en $(0,\ 0)$ ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es f diferenciable?

(b) Hallar la diferencial de f en $(1,1)$.

(c) Hallar la matriz jacobiana de $g\circ f$ en $(1,1)$.

Solución:

(a) (i) $f_1(x,y)=xy\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}=y \quad \text{es continua en } I\!R^2\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}=x \quad \text{es continua en } I\!R^2\end{array}\right\}\Rightarrow f_1$ es diferenciable en $I\!R^2$

(ii) $f_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\Rightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial f_2}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{es continua en } I\!R^2-\{(0,0)\}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{es continua en } I\!R^2-\{(0,0)\}\end{array}$

Para $(x,\ y)=(0,\ 0)$,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h^2+0^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}=\pm 1\Rightarrow \text{ no existe el límite } \Rightarrow \text{ no existe } \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0)$$

$$\Rightarrow f \text{ no es diferenciable en } (0,0)\Rightarrow f \text{ es diferenciable en } I\!R^2-\{(0,0)\}$$

(b) $\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(1,1)=1; & \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(1,1)=1; & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(1,1)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow Df(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$

$Df(1,1)$ es una aplicación lineal de $I\!R^2$ en $I\!R^2$ que actúa sobre el vector (h,k)

$$Df(1,1)(h,k)=\left(h+k,\ \frac{\sqrt{2}}{2}h+\frac{\sqrt{2}}{2}k\right)$$

(c) La matriz jacobiana, de $g\circ f$ en $(1,1)$ es $J(g\circ f)(1,1)=J(g)(f(1,1))\cdot J(f)(1,1)$

$J(f)(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$ y $f(1,1)=(1,\ \sqrt{2})$.

Si $v\neq 0$, $\nabla g(1,\ \sqrt{2})=\left.\left(2\dfrac{u}{v},\ -\dfrac{u^2}{v^2}\right)\right|_{(1,\ \sqrt{2})}=(\sqrt{2},\ -\dfrac{1}{2})$. Por tanto,

$$J(g\circ f)(1,1)=J(g)(f(1,1))\cdot J(f)(1,1)=\left(\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\left(\frac{3\sqrt{2}}{4},\ \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

Ejercicio 2. (1,4 puntos) Calcula los puntos críticos de la función $f(x,y) = sen(x)cos(y)$ en el intervalo $[-1,2]\times[-1,2]$ y determina si son máximos relativos, mínimos relativos o puntos de silla.

Solución: Los puntos críticos son aquellos que verifican

$$\frac{\partial f}{\partial x} = cos(x)cos(y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -sen(x)sen(y) = 0$$

Las soluciones son los puntos (x,y) tales que $sen(x) = 0$ y $cos(y) = 0$, ó $cos(x) = 0$ y $sen(y) = 0$. Por tanto, las únicas soluciones en $[-1,2]\times[-1,2]$ son $(\pi/2,0)$ y $(0,\pi/2)$. Además, se tiene que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -sen(x)cos(y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = -cos(x)sen(y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -sen(x)cos(y)$$

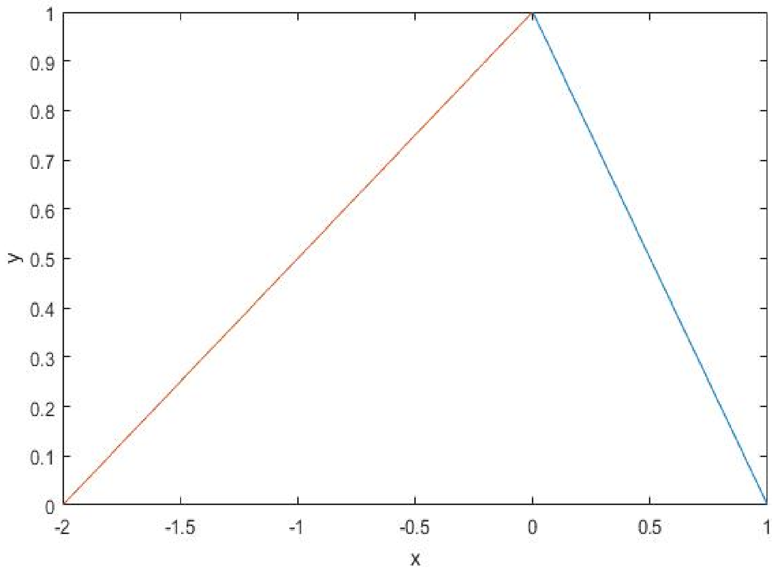
Entonces

$$Hf(\pi/2,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Hf(0,\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det Hf(\pi/2,0) = 1$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pi/2,0) = -1$, hay un máximo relativo en $(\pi/2,0)$.
Como $\det Hf(0,\pi/2) = -1$, hay un punto de silla en $(0,\pi/2)$.

Ejercicio 3. (1,3 puntos) Calcula $\int\int_D xy\ dx\ dy$ donde D es el triángulo de vértices $(-2,0)$, $(0,1)$ y $(1,0)$.

Solución: El recinto de integración es:



donde la recta que pasa por $(-2,0)$ y $(0,1)$ tiene ecuación $2y - x = 2$ y la recta que pasa por $(0,1)$ y $(1,0)$ tiene ecuación $x + y = 1$. Entonces,

$$\int\int_D xy\ dx\ dy = \int_0^1 \int_{2y-2}^{1-y} xy\ dx\ dy = \int_0^1 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{2y-2}^{1-y} dy = \frac{1}{2}\left[-\frac{3}{4}y^4 + 2y^3 - \frac{3}{2}y^2\right]_0^1 = -\frac{1}{8}.$$

Ejercicio 4. (1,5 puntos) Sea el campo vectorial $\bar{f}(x,\ y) = (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x,\ \cos x + x\cos y + y)$.

a) Comprobar si es conservativo.

b) Calcula la función potencial en caso afirmativo.

c) Calcula $\int_\gamma \bar{f} dl$, siendo γ la parte de la circunferencia centrada en el origen y de radio π, con origen en el punto $A = (\pi,\ 0)$ y extremo $B = (0,\ \pi)$ recorrida en el sentido de las agujas del reloj.

Solución *a*) Sea $\bar{f}(x,y) = (M(x,y),\ N(x,y))$. M y N tienen derivadas parciales continuas. Como

$$\frac{\partial M(x,\ y)}{\partial y} = \cos y - \operatorname{sen} x, \qquad \frac{\partial N(x,\ y)}{\partial x} = -\operatorname{sen} x + \cos y,$$

entonces, $\dfrac{\partial M(x,\ y)}{\partial y} = \dfrac{\partial N(x,\ y)}{\partial x}$ y, por tanto, $\bar{f}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$.

b) Sea f una función potencial de $\bar{f}$, entonces $\nabla f(x,\ y) = (f_x(x,\ y),\ f_y(x,\ y)) = (M(x,\ y),\ N(x,\ y))$. Si $f_x(x,\ y) = \operatorname{sen} y - y\operatorname{sen} x + x$, entonces $f(x,\ y) = \int(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x + x)\ dx = x \operatorname{sen} y + y\cos x + \dfrac{x^2}{2} + h(y)$, siendo $h(y)$ una función que depende sólo de y. Derivando esta última expresión de $f(x,\ y)$ respecto de y e igualando con N obtenemos $x\cos y + \cos x + h'(y) = \cos x + x\cos y + y \Rightarrow h'(y) = y \Rightarrow h(y) = \dfrac{y^2}{2} + c$
Una función potencial de $\bar{f}(x,\ y)$ en $\mathbb{R}^2$ es $f(x,\ y) = x\operatorname{sen} y + y\cos x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + c$, con $c \in \mathbb{R}$.

c) Puesto que el campo es conservativo las integrales de $\bar{f}$ a lo largo de curvas en $\mathbb{R}^2$ sólo dependen de los extremos, por tanto $\int_\gamma \bar{f} dl = \int_A^B \bar{f} dl = f(0,\ \pi) - f(\pi,\ 0) = \pi + \dfrac{\pi^2}{2} - \dfrac{\pi^2}{2} = \pi$.

Ejercicio 5. (0,5 puntos) Hallar todas las soluciones de la ecuación $e^{2z} - 1 = 0$.

Solución:

$$e^{2z} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2z} = 1 = e^{2k\pi j}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad z = k\pi j, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ejercicio 6. (1,5 puntos) Sea $f(z)$ una función analítica en el disco de centro cero y radio R, con $R > 1$, que verifica $f(0) = 1$ y $f'(0) = 2$. Calcula la integral

$$\int_\gamma \left(2z + 3 + \frac{4}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz$$

siendo γ la circunferencia de centro 0 y radio 1 orientada positivamente.

Solución:

$$\int_\gamma \left(2z + 3 + \frac{4}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz = \int_\gamma 2\ f(z)\ dz + 3\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\, dz + 4\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\, dz.$$

La función $f(z)$ es analítica en el dominio simplemente conexo cuyo contorno es la circunferencia $|z| = 1$, entonces $\displaystyle\int_\gamma f(z)\, dz = 0$. Por ser $f(z)$ analítica en un abierto que contiene a $|z| \leq 1$ en virtud de la fórmula integral de Cauchy y de las derivadas sucesivas:

$$3\int_\gamma \frac{f(z)}{z}\, dz = 3 \cdot 2\pi j f(0) = 6\pi j, \qquad 4\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\, dz = 4 \cdot 2\pi j f'(0) = 16\pi j.$$

Entonces,

$$\int_\gamma \left(z + 2 + \frac{1}{z}\right) \frac{f(z)}{z}\, dz = 0 + 6\pi j + 16\pi j = 22\pi j$$

Ejercicio 7. (1,8 puntos) Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{4}{5 - cos(t)} dt$.

Solución: Haciendo el cambio de variable $z = e^{tj}$, se tiene $dz = jzdt$, $cos(t) = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$, y entonces,

$$\int_0^{2\pi} \frac{4}{5 - cos(t)} dt = 8j \int_C \frac{dz}{z^2 - 10z + 1} = 8j \int_C \frac{dz}{(z - (5 + 2\sqrt{6}))(z - (5 - 2\sqrt{(6)}))} dz,$$

donde C es la circunferencia de centro 0 y radio 1 orientada positivamente. Aplicando el teorema de los residuos,

$$\int_0^{2\pi} \frac{4}{5 - cos(t)} dt = 8j2\pi j Res(f, 5 - 2\sqrt{6}) = \frac{4\pi}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}\pi}{3}.$$