# Tema 2: Cálculo diferencial de funciones vectoriales

1. Hallar una representación paramétrica de

   *a*) La recta que pasa por $(1, 2, 1)$ en la dirección del vector $(1, -1, 2)$.

   *b*) El segmento con extremos en los puntos (2,0,4) y (1,0,6).

   *c*) El segmento con extremos en los puntos (1,0) y (0,1).

   *d*) La recta $x + y = 2$.

   *e*) La circunferencia con centro en (3,1) y radio 2.

   *f*) La circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$.

   *g*) El cuadrado de vértices (0,0) (1,0) (1,1) y (0,1).

   *h*) El arco de parábola $y = (x - 1)^2$ que va del punto (0,1) al (3,4).

   *i*) La curva $y = e^x$.

   *j*) La recta $x + y + z = 1,\ x = y$

2. Calcular la recta tangente a la hélice circular $\bar{r}(t) = (\cos(t),\ \mathrm{sen}(t),\ t)$ en los puntos

   *a*) $\bar{r}(\pi/4)$

   *b*) $(1, 0, 0)$

   *c*) $\bar{r}(\pi/2)$

3. Comprobar que la siguientes funciones son diferenciables.

   (a) $f(x, y) = (x^2 y,\ e^{-xy})$

   (b) $f(x, y, z) = (2x + xz + y^2,\ z^2 + y,\ x^2 + z)$

   (c) $f(x, y, z) = (e^{xz} + x - 1,\ ae^y + z^2)$

4. Sean las funciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$f(x, y, z) = (\mathrm{sen}(xy + z),\ (1 + x^2)^{yz})$$
$$g(u, v) = (u + e^v,\ v + e^u)$$

   (a) Comprobar que $f$ es diferenciable en $(1, -1, 1)$

(b) Comprobar que $g$ es diferenciable en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

(c) Calcular $d(f \circ g)(1, -1, 1)$

5. Dada la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f(x,\, y,\, z) = (u,\, v,\, w)$, siendo $u = xyz$, $v = xy + yz + zx$, y $w = x + y + z$, se pide hallar la matriz Jacobiana de $f$ en un punto cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que el jacobiano de una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, representado por $\dfrac{\partial(u,\, v,\, w)}{\partial(x,\, y,\, z)}$, en un punto es el determinante de la matriz Jacobiana en dicho punto, hallar el jacobiano para la función dada en $(2,\, -1,\, 1)$.

6. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dos funciones definidas por

$$f(x, y) = (e^{x+2y},\ \operatorname{sen}(y + 2x))$$
$$g(u, v, t) = (u + 2v^2 + 3t^3,\ 2v - u^2)$$

   (a) Hallar las matrices jacobianas de $f$ y $g$.

   (b) Hallar la matriz jacobiana de $f \circ g$ en $(1, -1, 1)$

7. Dadas las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x, y) = (y + \cos x,\ x + e^y),\ g(x, y) = x + y$$

   (a) Probar que $f$ y $g$ son diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

   (b) Hallar la diferencial de $h = g \circ f$ en $(0, 0)$.

   (c) Hallar la derivada direccional de $h$ en $(0, 0)$, en la dirección del vector $(2, 1)$.

   (d) Hallar la derivada direccional máxima de $h$ en $(0, 0)$

   (e) Probar que $h(x, y) = 2$ define a y como función implícita de $x$ en un entorno de $(0, 0)$

8. Probar que la ecuación $xy + \ln(xy) = 1$ define a $y$ como función implícita de $x$ en el punto (1,1). Calcular la recta tangente a esta función en dicho punto.

9. Si $u = \operatorname{sen}(xy^2)$, $x = \ln t$, $y = e^t$, calcular $\dfrac{du}{dt}$.

10. Escribir la expresión $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y}$ en función de las variables $u$ y $v$ sabiendo que $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \end{cases}$

11. Si $u = u(x,\, y)$ es una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y $x = e^r \cos\theta$ e $y = e^r \operatorname{sen}\theta$, demostrar $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2r}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2\right]$