Cálculo II
Tema 4: Integral de línea

1. Calcula la integral de línea de $f(x,y) = (xy, x^2 - y^2)$ a lo largo de los siguientes caminos:

   (a) La circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 con orientación positiva.

   (b) El arco de la parábola $y^2 = x$ desde el punto $(1,-1)$ hasta el punto $(1,1)$.

   (c) El arco de la curva $y^2 = x^3$ desde $(1,-1)$ hasta $(1,1)$.

   (d) La elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$ con orientación positiva.

2. Se llama C_1 al segmento que une los puntos $(0,2)$ y $(-5,-3)$, C_2 al arco de la parábola $x = 4 - y^2$ desde $(-5,-3)$ hasta $(0,2)$ y C a la curva cerrada que une C_1 y C_2 recorrida en sentido positivo. Calcula la integral $\displaystyle\int_C y^2 dx + x dy$.

3. Calcula $\displaystyle\int_\gamma 2x\cos y\ dx - x^2 \operatorname{sen} y\ dy$, donde γ es la curva $\gamma(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t)$ desde $(1,0)$ hasta $(0,1)$.

4. Se considera el campo vectorial $f(x,y) = (-y\varphi(x), x\varphi(x))$, donde φ es una función definida en $(0,+\infty)$ con derivada continua. Calcula φ para que f sea un gradiente en alguna región del plano y determina una función potencial de f.

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo vectorial definido como $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (2xy, x^2)$.

   (a) Demuestra que $\displaystyle\int_\gamma f_1 dx + f_2 dy = 0$ para cualquier curva γ cerrada en $\mathbb{R}^2$.

   (b) Calcula $\displaystyle\int_\gamma f_1 dx + f_2 dy$ si $\gamma(t) = (t, e^{t^2})$ y $0 \le t \le 1$.

6. Calcula la integral $\displaystyle\int_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2+y^2}$ en los dos casos siguientes:

   (a) C es la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ desde $(0,1)$ hasta $(1,1/2)$.

   (b) C es la circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 con orientación positiva.

7. Aplica el teorema de Green para calcular $\displaystyle\int_\gamma (5-xy-y^2)dx-(2xy-x^2)dy$, donde γ representa el contorno del cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ orientado en sentido positivo.

8. Se llama D al subconjunto del primer cuadrante del plano comprendido entre la circunferencia de ecuación $x^2+y^2 = 4$ y la elipse de ecuación $x^2+4y^2 = 16$. Se llama γ al contorno de D orientado en sentido positivo.

   (a) Calcula $\displaystyle\int_\gamma y\ dx - x\ dy$ utilizando una parametrización de γ.

   (b) Calcula $\displaystyle\int_\gamma y\ dx - x\ dy$ aplicando el teorema de Green.