Tema 5: Funciones analíticas

1. Calcula en radianes el argumento de $(-1+j)$, y el módulo de $\dfrac{1+j}{2+j}$

2. Calcula $(1+2j)^4$ y el inverso de $(1-j)$, expresando el resultado en forma binómica.

3. Realiza las operaciones indicadas

   a) $\dfrac{1-j}{1+j}$

   b) $(1+j\sqrt{3})^3$

4. Halla los valores de las siguientes raíces y constrúyelos

   a) $\sqrt[3]{1}$

   b) $\sqrt[5]{-4+3j}$

5. Explica el significado geométrico de las siguientes relaciones

   a) $|z-z_0| < R$ ($z_o \in \mathbb{C}$ y $R \in \mathbb{R}^+$ fijos)

   b) $lm\ \dfrac{z-j}{z-(1+j)} = 0,$ y $Re\ \dfrac{z-j}{z-(1+j)} = 0$

   c) $1 < |z+j| \leq 2$

6. Determina las curvas definidas por las ecuaciones dadas:

   a) $z = t + j\,t^2,$ si $\quad t \in \mathbb{R}$

   b) $z = a(\cos t + j \operatorname{sen} t),$ si $\quad \dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{3\pi}{2}; a > 0$

7. Expresa las funciones siguientes como la suma de la parte real e imaginaria

   a) $f(z) = 2z^2 - 3jz$

   b) $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$

   c) $f(z) = z^{1/2}$

8. Halla el módulo y el valor principal del argumento para las funciones dadas en los puntos indicados:

   a) $f(z) = z\,e^z$ en $z = \pi j$

   b) $f(z) = \cos z$ en $z = \dfrac{\pi}{2} + j(Ln\ 2)$

9. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones

   a) $f(z) = \bar{z}$

   b) $f(z) = e^x\,e^{-yj}$

c) $f(z) = \dfrac{1}{z}$

10. Halla la función analítica $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ tal que:
$u(x,y) = x - y$ y $f(3) = 3 + \sqrt{5}j$

11. a) Sea $u(x,y)$ la parte real de una función analítica en $\mathbb{C}$. Sean $v_1(x,y)$ y $v_2(x,y)$ dos conjugadas armónicas de $u(x,y)$. Demuestra que $v_1(x,y) - v_2(x,y)$ es constante.

    b) Sea $v(x,y) = x^2 - y^2$. Determina todas las funciones analíticas $f(x)$ cuya parte imaginaria sea $v(x,y)$

12. Determina todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:

    a) $e^{2z} + 2e^z + 1 = 0$

    b) $\cos z = 2$

    c) $z^4 - 1 = 0$

13. Prueba las siguientes igualdades:

    a) $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

    b) $|e^{jz}| = e^{-y} \quad \forall z = x + jy \in \mathbb{C}$

    c) $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \overline{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

14. Halla

    a) $\ln(-1-j)$

    b) $(1+j)^j$

    c) $\operatorname{Re}(1-j)^{1+j}$

15. Estudia la analiticidad de las siguientes funciones:

    a) $f(z) = \operatorname{sen} z$

    b) $f(z) = Ln(z), \qquad Arg\ z \in (-\pi, \pi]$

    c) $f(z) = \dfrac{1}{3z^2+1}$

    d) $f(z) = \dfrac{z}{1-e^z}$

    e) $f(z) = \dfrac{z^2}{z-3}$

    f) $f(z) = 2\, e^{-z}$

    g) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+2z+2}$