Tema 6: Integración Compleja

1. Calcula $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$, siendo

   a) $f(z) = z\ Im(z^2)$ y γ el arco de la circunferencia $|z| = 1$ desde $z_1 = 1$ hasta $z_z = j$.

   b) $f(z) = e^{|z|^2} Re(z)$ y γ el segmento que une $z_1 = 0$ y $z_2 = 1 + j$.

   c) $f(z) = |e^z|$ y γ es el segmento de extremos $-1 - j$ y $1 + j$

2. Sea γ la circunferencia $|z - a| = r$ donde a es un punto del plano complejo y r es un número real positivo.

   a) Demuestra por cálculo directo que si n es un entero y γ se recorre en sentido positivo entonces
   $$\int_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi j & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n \neq 1 \end{cases}$$

   b) Utiliza el apartado anterior para calcular
   $$\int_\gamma \sum_{k=-N}^{N} \frac{A_k}{(z-a)^k} dz$$
   donde γ es una circunferencia centrada en a y recorrida en sentido positivo.

3. Sea a un punto del plano complejo y R un número real tal que $R > |a|$. Sea γ_R la circunferencia $|z| = R$ recorrida en sentido positivo.

   a) Demuestra, sin calcular la integral, que
   $$\left| \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2 - a^2} \right| \leq \frac{2\pi R}{R^2 - |a|^2}$$

   b) Deduce del apartado anterior que
   $$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2 - a^2} = 0$$

4. Sean $f(z) = 2z + 1,\ g(z) = \operatorname{Re} z$ y $h(z) = \cos z$

   a) Determina la región donde es analítica cada una de las tres funciones anteriores.

   b) Tienen sentido las expresiones
   $$\int_0^{2j} f(z)dz, \quad \int_0^{2j} g(z)dz, \quad \int_0^{2j} h(z)dz \ ?$$
   Por qué?

   c) Calcula las integrales anteriores siempre que tengan sentido.

   d) Calcula
   $$\int_\gamma f(z)dz, \quad \int_\gamma g(z)dz, \quad \int_\gamma h(z)dz$$
   donde γ es la circunferencia $|z| = 1$ recorrida en sentido positivo.

5. La función $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - 1}$ admite la descomposición en fracciones simples
   $$f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1}$$

a) Determina los valores A y B

b) Comprueba que

$$A = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z)$$
$$B = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z)$$

c) Utiliza la descomposición anterior para calcular

$$\int_\gamma f(z)dz$$

en cada uno de los siguientes casos

1) γ es la circunferencia $|z| = 2$
2) γ es la circunferencia $|z-1| = 1$
3) γ es la circunferencia $|z+1| = 1$
4) γ es la circunferencia $|z-2-j| = 1$

6. Halla el desarrollo en serie de potencias de z de la función $\dfrac{1+z}{z-1}$ y hallar la región donde $f(z)$ es representable por la serie.

7. Descomponiendo en fracciones simples prueba que si $0 < |z-1| < 2$

$$\frac{z}{(z-1)(z-3)} = \frac{-1}{2(z-1)} - 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+2}}$$

8. El punto z_0 es un cero de orden k para la función $f(z)$ y es un cero de orden l para la función $g(z)$. ¿Qué es el punto z_0 para las siguientes funciones?

   a) $f(z)\,g(z)$
   b) $f(z) + g(z)$
   c) $\dfrac{f(z)}{g(z)}$

9. Halla el orden de todos los ceros de las funciones

   a) $\operatorname{sen} z$
   b) $\cos^3 z$
   c) $(1-e^z)(z-2)^2$

10. Determina el orden de los polos y el valor de sus residuos correspondientes de las siguientes funciones.

    a) $\dfrac{5z-2}{z^2}$
    b) $\dfrac{1-ch\ z}{z^3}$
    c) $\dfrac{1-e^{2z}}{z^4}$
    d) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^2}$

11. *a*) Sea $f(z)$ analítica en la región que limita una curva cerrada y simple γ. Sea z_0 un cero de orden m de $f(z)$ en el interior de γ. Demuestra que si
    $f(z) \neq 0 \quad \forall z \neq z_0$ entonces

$$\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = m$$

b) ¿Cuál es el valor de $\frac{1}{2\pi j}\int_\gamma \frac{f'(z)dz}{f(z)}$ si $f(z)$ tiene N ceros y todos ellos simples simples en la región que limita γ?

12. Halla $I(a) = \displaystyle\int_{C_a} \frac{e^z}{z^2+\pi^2}$ con $a \in \mathbb{R}$ $\quad a \neq k\pi j$, $\forall k$ entero y C_a la frontera de

$$D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -1 < x < 1, \quad a < y < a+\pi\}$$

orientada en sentido positivo.

13. *a*) Determina los ceros y las singularidades, especificando su orden, de la función compleja de variable compleja

$$f(z) = \frac{\pi z(1-z^2)}{\operatorname{sen} \pi z}$$

b) Calcula la integral $\displaystyle\int_C f(z)\, dz$ siendo $C = \left\{z \mid |z-3| < \frac{1}{2}\right\}$ recorrida en sentido positivo.

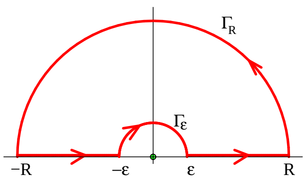
14. Se llama C a la circunferencia en el plano complejo con centro 0 y radio 1, orientada en sentido positivo.

a) Utilice el cambio de variable $z = e^{jt}$ para demostrar la siguiente igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt = \frac{2}{j}\int_C \frac{1}{1+4z+z^2}\, dz$$

b) Utilice el apartado anterior y el teorema de los residuos para calcular la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt.$

15. *a*) Sea $f(z) = \dfrac{1}{z^5} \cdot \left(-1 - jz + \frac{z^2}{2!} + j\frac{z^3}{3!} + e^{jz}\right)$ y sea γ el contorno de la figura. Calcula: $\int_\gamma f(z)dz$



b) Sabiendo que $\displaystyle\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Gamma_\epsilon} f(z)dz = -\pi j\, R_1$

Siendo R_1 el residuo en $z_0 = 0$ de $f(z)$ y sabiendo que: $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 0$

$$\text{Calcula: } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2+x^2+2\cos x}{2x^5}dx \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-6x+x^3+6\ \operatorname{sen} x}{6x^5}dx$$

16. *a*) Determine si existe algún número complejo z tal que $\operatorname{tg} z = j$.

b) Calcule todos los números complejos z tales que $\operatorname{tg} z = 1$.

c) Sea γ la circunferencia en $\mathbb{C}$ de ecuación $\left|z - \frac{\pi}{4}\right| = 1$, recorrida en sentido positivo. Calcule las dos integrales siguientes:

$$i)\ \int_\gamma \frac{dz}{\operatorname{tg} z - j}, \qquad\qquad ii)\ \int_\gamma \frac{dz}{\operatorname{tg} z - 1}.$$