ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
CONVOCATORIA: FEBRERO 2010/2011
FECHA: 19 de enero de 2011 **Fecha publicación notas:** 21 de enero de 2011
Duración del examen: 3 horas **Fecha revisión examen:** 25 de enero de 2011

APELLIDOS **NOMBRE:**
DNI: **TITULACIÓN:**

SOLUCIONES

PRIMER PARCIAL

1. Un espectador quiere comprar una entrada de cine por internet. Para ello cuenta con 3 portales de venta V_1, V_2 y V_3 y sólo puede acceder a uno de los tres. Se sabe que el 30 % de las veces utiliza el primer portal, el 50 % de las veces utiliza el segundo y el 20 % de las veces usa el tercero.

   La probabilidad de conseguir la entrada a través del portal V_1 es 0.2, a través del portal V_2 es 0.4 y a través de V_3 es 0.6.

   a) **(0,6 puntos)** Calcula la probabilidad de que el espectador pueda comprar la entrada por internet.

   b) **(0,6 puntos)** Sabiendo que ha conseguido la entrada, calcula la probabilidad de que la haya adquirido a través del portal V_1 o del V_2.

Solución

Sean los sucesos con las probabilidades indicadas:
El espectador utiliza el primer portal de venta, V_1, con probabilidad $P(V_1) = 0,3$
El espectador utiliza el segundo portal de venta, V_2, con probabilidad $P(V_2) = 0,5$
El espectador utiliza el tercer portal de venta, V_3, con probabilidad $P(V_3) = 0,2$
Estos sucesos son incompatibles, el suceso $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ es que el espectador utiliza alguna de los portales de venta, que es un suceso seguro, y $P(V_1)+P(V_2)+P(V_3) = 1$, por lo que $\{V_1,\ V_2,\ V_3\}$ es un sistema completo de sucesos.

Además, si T es el suceso "el espectador adquiere la entrada", entonces
$P(T/V_1) = P(\text{tener entrada/utiliza } V_1) = 0,2$
$P(T/V_2) = P(\text{tener entrada/utiliza } V_2) = 0,4$
$P(T/V_3) = P(\text{tener entrada/utiliza } V_3) = 0,6.$

a) Aplicamos el Teorema de la Probabilidad Total con el sistema completo de sucesos $\{V_1,\ V_2,\ V_3\}$ para obtener la probabilidad de T.

$$P(T) = P(T/V_1)\cdot P(V_1)+P(T/V_2)\cdot P(V_2)+P(T/V_3)\cdot P(V_3) = 0,2\cdot 0,3+0,4\cdot 0,5+0,6\cdot 0,2 = 0,38$$

b) Para calcular la probabilidad de que un espectador con entrada la haya adquirido el primer o en el segundo en portal de venta, $P((V_1 \cup V_2)/T)$ utilizamos propiedades de las probabilidades, la incompatibilidad del sistema completo de sucesos y el Teorema de Bayes

$$P((V_1 \cup V_2)/T) = P(V_1/T) + P(V_2/T) - P((V_1 \cap V_2)/T) = P(V_1/T) + P(V_2/T) - P(\emptyset) =$$

$$= \frac{P(V_1 \cap T)}{P(T)} + \frac{P(V_1 \cap T)}{P(T)} = \frac{P(T/V_1) \cdot P(V_1)}{P(T)} + \frac{P(T/V_1) \cdot P(V_1)}{P(T)} =$$

$$= \frac{0,2 \cdot 0,3}{0,38} + \frac{0,4 \cdot 0,5}{0,38} = \frac{26}{38} \simeq 0,68421$$

2. Sea $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ un espacio de probabilidad, con $A \in \mathcal{A}$ y $P(A) > 0$. Demuestra que:

   a) **(0,5 puntos)** Para cualquier suceso $B \in \mathcal{A}$ se cumple

   $$P(B^c/A) = 1 - P(B/A)$$

   b) **(0,5 puntos)** Para cualesquiera sucesos $B,\ C \in \mathcal{A}$ se cumple

   $$P((B \cup C)/A) = P(B/A) + P(C/A) - P((B \cap C)/A)$$

Solución

a) El suceso A se puede expresar como $A = A \cap \Omega = A \cap (B \cup B^c) = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ y se verifica $(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = A \cap B \cap B^c = \emptyset$, luego $A \cap B$ y $A \cap B^c$ son incompatibles y $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$.

$$P(B^c/A) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - P(B/A)$$

b) Utilizando las propiedades de las probabilidades $P((B \cup C)/A) = \dfrac{P(A \cap (B \cup C))}{P(A)} =$

$$= \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(A)} = \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C))}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} + \frac{P(A \cap C)}{P(A)} - \frac{P(A \cap (B \cap C))}{P(A)} = P(B/A) + P(C/A) - P((B \cap C)/A)$$

3. *a*) **(0,5 puntos)** Una caja contiene n componentes defectuosos y m no defectuosos. Se seleccionan, con reemplazamiento, tres componentes, ¿cuál es el mínimo número de componentes de una y otra clase que debe contener la caja para que la probabilidad de no obtener ninguno defectuoso coincida con la de obtener exactamente uno defectuoso?

   b) **(0,5 puntos)**

   Considera $n = 8$ y $m = 4$. Calcula el valor de i para que la probabilidad de obtener el primero no defectuoso en la i-ésima extracción con reemplazamiento sea 8 veces la probabilidad de obtener el primero defectuoso en la i-ésima extracción.

Solución

a) Sea X la variable aleatoria que mide el número de componentes defectuosos obtenidos en las tres extracciones.

$X \sim Bin(3, \frac{n}{n+m})$

$$P(X=i)=\binom{3}{i}\left(\frac{n}{n+m}\right)^i\left(1-\frac{n}{n+m}\right)^{3-i}, \quad i=0,1,2,3.$$

Sabemos que $P(X=0)=P(X=1)$, es decir

$$\binom{3}{0}\left(\frac{n}{n+m}\right)^0\left(1-\frac{n}{n+m}\right)^{3-0}=\binom{3}{1}\left(\frac{n}{n+m}\right)^1\left(1-\frac{n}{n+m}\right)^{3-1}$$

$$\left(\frac{m}{n+m}\right)^3=3\frac{n}{n+m}\left(\frac{m}{n+m}\right)^2$$

$$\frac{m}{n+m}=\frac{3n}{n+m}$$

Los menores valores de n y m que verifican $m=3n$ son $n=1$ y $m=3$

b) Sea Y la variable aleatoria que mide el número de extracciones necesarias para obtener el primer componente defectuoso.

$Y \sim Geo(2/3)$

$$P(Y=i)=\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1}\frac{2}{3}=\frac{2}{3^i}, \quad i=1,2,\ldots$$

Sea Z la variable aleatoria que mide el número de extracciones necesarias para obtener el primer componente no defectuoso.

$Z \sim Geo(1/3)$

$$P(Z=i)=\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}\frac{1}{3}=\frac{2^{i-1}}{3^i}, \quad i=1,2,\ldots$$

$$P(Z=i)=8P(Y=i)\Rightarrow 2^{i-1}=8\cdot 2\Rightarrow i-1=4\Rightarrow i=5$$

4. La función de densidad de la variable aleatoria X es

$$f(x)=\begin{cases} k\ x & \text{si } 1\le x<2 \\ k\ x^2 & \text{si } 2\le x<3 \\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$$

Se pide:

a) **(0,4 puntos)** Determina la constante k.

b) **(0,5 puntos)** Determina la esperanza de la variable aleatoria $\frac{1}{X}$.

Solución

a) Si $f(x)$ es la función de densidad de X entonces, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx=1$. En este caso,

$$1=\int_1^2 k\ x\ dx+\int_2^3 k\ x^2\ dx=k\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+k\frac{x^3}{3}\Big|_2^3=k\frac{4-1}{2}+k\frac{27-8}{3}=\frac{9k+38k}{6}\Longrightarrow k=\frac{6}{47}$$

b) $E\left[\frac{1}{X}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x}\ f(x)\ dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\ k\ x\ dx + \int_2^3 \frac{1}{x}\ k\ x^2\ dx = k\frac{x}{1}\Big|_1^2 + k\frac{x^2}{2}\Big|_2^3 =$

$$= k\left(1 + \frac{9-4}{2}\right) = \frac{6}{47}\ \frac{2+5}{2} = \frac{21}{47} \simeq 0,4468$$

SEGUNDO PARCIAL

5. Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[4,\ 10]$.

   a) **(0,4 puntos)** Calcula $P(X^2 < 36)$.

   b) **(0,4 puntos)** Sea $Y = -X + 10$, calcula $P(Y < 3)$.

Solución

Si X es una v.a. $U(4,\ 10)$ su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10-4} = \dfrac{1}{6} & \text{si } 4 \leq x \leq 10 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) $P(X^2 < 36) = P(-6 < X < 6) = \int_{-6}^{4} 0\ dx + \int_4^6 \frac{1}{6}\ dx = 2\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \simeq 0,3333$

b) $P(Y < 3) = P(-X + 10 < 3) = P(7 < X) = \int_7^{10} \frac{1}{6}\ dx + \int_7^{\infty} 0\ dx = 3\frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$

6. Sea $(X,\ Y)$ una variable aleatoria bidimensional con función de densidad

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2} & \text{si } 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad |y| < x^2 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

   a) **(0,5 puntos)** Calcula $P(X > \frac{1}{2})$.

   b) **(0,5 puntos)** Halla la varianza de la variable aleatoria X.

Solución

a) $P(X > \frac{1}{2}) = \int_{1/2}^1 \frac{3}{2}\left(\int_{-x^2}^{x^2} dy\right) dx = \frac{3}{2}\int_{1/2}^1 (x^2 + x^2)\ dx = \frac{3}{2}\ 2\frac{x^3}{3}\Big|_{1/2}^1 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$

b) $E[X] = \int_0^1 \frac{3}{2}\ x\left(\int_{-x^2}^{x^2} dy\right) dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x\ (x^2 + x^2)\ dx = \frac{3}{2}\ 2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4} = 0,75$

$E[X^2] = \int_0^1 \frac{3}{2}\ x^2\left(\int_{-x^2}^{x^2} dy\right) dx = \frac{3}{2}\int_0^1 x^2\ (x^2 + x^2)\ dx = \frac{3}{2}\ 2\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{3}{5} = 0,6.$

Así, $V[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 0,6 - (0,75)^2 = \frac{3}{80} = 0,0375.$

7. Sean X e Y variables aleatorias independientes continuas. Expresa las siguientes probabilidades en términos de las funciones de distribución de X y de Y (F_X y F_Y respectivamente).

   a) **(0,5 puntos)** $P(a < X \leq b,\ Y > c)$.

   b) **(0,6 puntos)** $P(|X| \leq a,\ c \leq Y \leq d)$.

   Siendo a, b, c, d constantes, con $a > 0$.

Solución

a) Por ser X e Y independientes $P(a < X \leq b,\ Y > c) = P(a < X \leq b) \cdot P(Y > c) =$
$= P(a < X \leq b) \cdot [1 - P(Y \leq c)] = [P(X \leq b) - P(X \leq a)] \cdot [1 - P(Y \leq c)] =$

$$= [F_X(b) - F_X(a)] \cdot [1 - F_Y(c)]$$

b) Por ser X e Y independientes $P(|X| \leq a,\ c \leq Y \leq d) = P(|X| \leq a) \cdot P(c \leq Y \leq d) =$
$= P(-a \leq X \leq a) \cdot [P(Y \leq d) - P(Y < c)] = [P(X \leq a) - P(X < -a)] \cdot [P(Y \leq d) - P(Y < c)]$.
Por ser X e Y continuas $[P(X \leq a) - P(X < -a)] \cdot [P(Y \leq d) - P(Y < c)] =$

$$= [F_X(a) - F_X(-a)] \cdot [F_Y(d) - F_Y(c)]$$

8. Las variables aleatorias X e Y son $\mathcal{N}(1, 1)$ con distribución conjunta normal bidimensional, con coeficiente de correlación $\rho = \dfrac{1}{2}$

   a) **(0,7 puntos)** Escribe la función de densidad de la variable aleatoria $U = 2Y - X - 8$.

   b) **(0,8 puntos)** Halla la probabilidad de que U sea mayor que -8.

Solución

$\dfrac{1}{2} = \rho = \dfrac{Cov[X, Y]}{\sqrt{V[X] \cdot V[Y]}} = Cov[X, Y]$. Por tanto, la v.a. $(X,\ Y)$ sigue una distribución normal bidimensional con vector de medias $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas covarianzas $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

a) La variable aleatoria $U = 2Y - X - 8 = (-1\ 2) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} - 8$, por lo que la distribución de U es normal. Por ser el operador esperanza lineal, $\mu_U = E[U] = 2E[Y] - E[X] - E[8] = 2 - 1 - 8 = -7$.
La varianza de U es

$$\sigma_U^2 = (-1\ 2) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3$$

Luego la función de densidad de U es $f_U(x) = \dfrac{1}{\sigma_U \sqrt{2\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu_U)^2}{2\,\sigma_U^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{6 \cdot \pi}}\, e^{-\dfrac{(x+7)^2}{6}}$

b) Para calcular la probabilidad pedida tipificamos la v.a. U,
$P(U > -8) = P\left(\dfrac{U+7}{\sqrt{3}} > \dfrac{-8+7}{\sqrt{3}}\right)$. La v.a. $Z = \dfrac{U+7}{\sqrt{3}}$ es $N(0,\ 1)$, si Φ es su función de distribución, aplicando la simetría de la función de densidad y consultando en las tablas

$$P(U > -8) = P\left(Z > -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - P\left(Z \leq -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \Phi(0,58) = 0,71904$$

9. Consideremos el proceso aleatorio $X(t) = A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)$, donde A y B son variables aleatorias incorrelacionadas, ambas con media 0 y varianza σ^2 pero con diferente distribución.

   a) **(0,4 puntos)** ¿Qué variables aleatorias son $X(0)$ y $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$? ¿Puede ser el proceso $X(t)$ estacionario en sentido estricto?

   b) **(0,3 puntos)** Calcula $E[X(t)]$.

   c) **(0,8 puntos)** Calcula $R_X(t, t+\tau)$. ¿Es $X(t)$ estacionario en sentido amplio?

   Indicación

   $$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}, \qquad \text{sen}(a)\,\text{sen}(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}$$

Solución

a) $X(0) = A\cos(0) + B\,\text{sen}(0) = A$; $\qquad X(\pi/4) = A\cos(\pi/2) + B\,\text{sen}(\pi/2) = B$.
Si el proceso $X(t)$ es estacionario en sentido estricto las distribuciones de primer orden serían iguales, pero como $X(0)$ y $X\left(\frac{\pi}{4}\right)$ tienen diferente distribución, puesto que A y B tienen diferente distribución, el proceso $X(t)$ no es E.S.E.

b) $E[X(t)] = E[A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t)] = E[A]\cdot\cos(2t) + E[B]\cdot\text{sen}(2t) = 0\cdot\cos(2t) + 0\cdot\text{sen}(2t) = 0.$

c) $R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = E[(A\cos(2t) + B\,\text{sen}(2t))\cdot(A\cos(2(t+\tau)) +$
$+ B\,\text{sen}(2(t+\tau)))] =$
$= E[A^2\cos(2t)\cos(2(t+\tau)) + AB(\text{sen}(2t)\cos(2(t+\tau)) + \cos(2t)\,\text{sen}(2(t+\tau))) +$
$+ B^2\,\text{sen}(2t)\,\text{sen}(2(t+\tau))] =$
$= E[A^2]\cos(2t)\cos(2(t+\tau)) + E[AB](\text{sen}(2t)\cos(2(t+\tau)) + \cos(2t)\,\text{sen}(2(t+\tau)) +$
$+ E[B^2]\,\text{sen}(2t)\,\text{sen}(2(t+\tau)).$
Utilizando que las v.a. A y B son incorrelacionadas, de media 0 y varianza común σ^2, y la indicación obtenemos,
$E[A^2] = E[B^2] = Var(A) = \sigma^2$
$E[AB] = Cov(A,B) + E[A] = E[B] = 0$ y por tanto,
$$R_X(t,t+\tau) = \sigma^2\left(\frac{\cos(4t+2\tau) + \cos(2\tau)}{2}\right) + 0\cdot 0\cdot(\text{sen}(2t)\cos(2(t+\tau)) + \cos(2t)\,\text{sen}(2(t+\tau)) +$$
$$+\sigma^2\left(\frac{\cos(2\tau) - \cos(4t+2\tau)}{2}\right) = \sigma^2\left(\frac{\cos(4t+2\tau) + \cos(2\tau) + \cos(2\tau) - \cos(4t+2\tau)}{2}\right) = \sigma^2\ \cos(2\tau)$$

Puesto que $E[X(t)]$ no depende de t y $R_X(t,t+\tau)$ solo depende de τ el proceso $X(t)$ es E.S.A.