Departamento de Matemática Aplicada a la I.T. de Telecomunicación

ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

CONVOCATORIA: ENERO 2012/2013 **FECHA:** 9 de Enero de 2013
Duración del examen: 3 horas
Fecha publicación notas: 15 de enero de 2013
Fecha revisión examen: 18 de enero de 2013

SOLUCIONES

---

1. *(1 punto)* Sean A, B y C tres sucesos con probabilidad no nula, tales que A es independiente de $\bar{B} \cap C$ y de $B \cap C$. Prueba que A es independiente de C.

   Solución.-

   A es independiente de C si y solo si $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$.

   $$P(A \cap C) = P(A \cap C \cap \Omega) = P[A \cap C \cap (B \cup \bar{B})] = P[(A \cap C \cap B) \cup (A \cap C \cap \bar{B})]$$

   Puesto que $(A \cap C \cap B) \cap (A \cap C \cap \bar{B}) = \emptyset$ los sucesos $A \cap C \cap B$ y $A \cap C \cap \bar{B}$ son incompatibles, se tiene que $P[(A \cap C \cap B) \cup (A \cap C \cap \bar{B})] = P(A \cap C \cap B) + P(A \cap C \cap \bar{B})$.
   Por ser A independiente de $\bar{B} \cap C$, $P(A \cap C \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(C \cap \bar{B})$
   Por ser A independiente de $B \cap C$, $P(A \cap C \cap B) = P(A) \cdot P(C \cap B)$. Por tanto,

   $$P(A \cap C) = P(A \cap C \cap B) + P(A \cap C \cap \bar{B}) = P(A) \cdot P(C \cap B) + P(A) \cdot P(C \cap \bar{B}) =$$

   $$= P(A) \cdot [P(C \cap B) + P(C \cap \bar{B})] = P(A) \cdot P[(C \cap B) \cup (C \cap \bar{B})] = P(A) \cdot P[C \cap (B \cup \bar{B})] =$$
   $$= P(A) \cdot P(C \cap \Omega) = P(A) \cdot P(C)$$

2. *(1,5 puntos)* En una bolsa que contiene 10 monedas hay una con doble cara y las 9 restantes son correctas. Una persona selecciona una de ellas al azar y la lanza tres veces.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en los tres lanzamientos?
   b) Sabiendo que en los tres lanzamientos se ha obtenido cara, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda elegida al azar sea la que tiene doble cara?

   Solución.-

   Sean los sucesos Mc seleccionar la moneda correcta, F seleccionar la moneda falsa y C_i obtener cara en el lanzamiento í-ésimo, con $i = 1, 2, 3$. Si S es el suceso obtener cara en los tres lanzamiento, S se puede expresar como $C_1 \cap C_2 \cap C_3$.

   a) $P(S) = P(C_1 \cap C_2 \cap C_3)$. Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total, con el sistema completo de sucesos $\{Mc,\ F\}$, para el resultado de cada experimento

   $$P(S) = P(Mc) \cdot P(S/Mc) + P(F) \cdot P(S/F) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 =$$

   $$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{17}{80} \Rightarrow P(S) = \left(\frac{17}{80}\right) 3 = 0,2125$$

b) Para obtener $P(F/S)$ aplicamos el Teorema de Bayes

$$P(F/S) = \frac{P(S/F) \cdot P(F)}{P(S)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{10}}{\left(\frac{17}{80}\right)3} = \frac{23}{17} = 0,47059$$

3. *(1,5 puntos)* La variable aleatoria continua X tiene una función de distribución dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax^2 & \text{si} \quad 0 \le x \le 5 \\ b & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$$

a) Determina los valores de a y b.

b) Calcula $P(1 \le X \le 2)$

c) Calcula $P(X^3 > 8)$

d) Calcula la función de densidad de X.

Solución.-

a) Por ser F función de distribución

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \text{ por tanto } b = 1$$

Además la función de distribución de X debe ser continua por ser continua la variable aleatoria, esto es

$$F(5) = \lim_{x \to 5^+} F(x) \Rightarrow 25a = 1 \Rightarrow a = 1/25$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2/25 & \text{si} \quad 0 \le x \le 5 \\ 1 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$$

b)

$$P(1 \le X \le 2) = P(1 < X \le 2) = F(2) - F(1) = \frac{3}{25}$$

c)

$$P(X^3 > 8) = P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$

d) Si f es la función de densidad de X, $f(x) = F'(x)$ en los puntos de continuidad de f, por tanto

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x/25 & \text{si} \quad 0 < x < 5 \\ 0 & \text{si} \quad x > 5 \end{cases}$$

4. *(1 punto)* La función de probabilidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional $(X,\ Y)$ es

X \Y	1	3
1	c	3c
2	2c	6c
4	4c	12c

a) Halla la constante c y las funciones de probabilidad marginales.

b) Calcula $P(X < Y)$ y $P(X > Y)$.

c) Calcula la covarianza entre X e Y.

Solución.-

a) Para hallar la constante c sumamos todas las probabilidades e imponemos que debe valer 1

$$1 = P(X = 1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 3) + P(X = 2, Y = 1) + P(X = 2, Y = 3)+$$

$$+P(X = 4, Y = 1) + P(X = 4, Y = 3) = c + 3c + 2c + 6c + 4c + 12c = 28c \Rightarrow c = \frac{1}{28}$$

Para hallar la función de probabilidad marginal de X sumamos las probabilidades conjuntas por filas

X =i	1	2	4
P(X=i)	4c=$\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$	8c=$\frac{8}{28} = \frac{2}{7}$	16c=$\frac{16}{28} = \frac{4}{7}$

Para hallar la función de probabilidad marginal de Y sumamos las probabilidades conjuntas por columnas

Y =j	1	3
P(Y=j)	7c=$\frac{7}{28} = \frac{1}{4}$	21c=$\frac{21}{28} = \frac{3}{4}$

b) $P(X < Y) = P(X = 1, Y = 3) + P(X = 2, Y = 3) = 3c + 6c = 9c = \frac{9}{28}$

$P(X > Y) = P(X = 2, Y = 1) + P(X = 4, Y = 1) + P(X = 4, Y = 3) = 2c + 4c + 12c = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$

c) $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$E[X] = 1 \cdot \frac{1}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{4}{7} = \frac{1 + 4 + 16}{7} = 3 \qquad E[Y] = 1 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{1 + 9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

$E[XY] = 1 \cdot 1 \cdot c + 1 \cdot 3 \cdot 3c + 2 \cdot 1 \cdot 2c + 2 \cdot 3 \cdot 6c + 4 \cdot 1 \cdot 4c + 4 \cdot 3 \cdot 12c = 210c = \frac{210}{28} = \frac{15}{2}$

Así, $Cov[X, Y] = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{15}{2} - 3 \cdot \frac{5}{2} = \frac{15 - 3 \cdot 5}{2} = 0$

5. *(1 punto)* Sean $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media 75 y varianza 225.

Utiliza el Teorema Central del Límite para calcular un valor aproximado de la probabilidad de que la media aritmética de esas 100 variables $\left(\frac{X_1 + \ldots X_{100}}{100}\right)$ difiera de la esperanza común a todas ellas en menos de 4 unidades.

Solución.- Para una secuencia $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E[X_i] = 75$ y $V[X_i] = 225$ $\forall i \in \{1, 2, \ldots 100\}$ el Teorema Central del Límite afirma que

$$Z_{100} = \frac{X_1 + \ldots + X_{100} - 100 \cdot 75}{\sqrt{225} \cdot \sqrt{100}}$$

sigue, aproximadamente, una distribución normal de media 0 y varianza 1, o equivalentemente $X_1 + \ldots + X_{100}$ tiene, aproximadamente una distribución normal de media $100 \cdot 75$ y desviación típica $\sqrt{100} \cdot \sqrt{225}$.

Si $\bar{X} = \frac{X_1 + \ldots X_{100}}{100}$ entonces, $P(|\bar{X} - 75| < 4) = P(-4 < \bar{X} - 75 < 4) =$

$$= P\left(-4 < \frac{X_1 + \ldots X_{100}}{100} - 75 < 4\right) = P\left(-4 < \frac{X_1 + \ldots X_{100} - 100 \cdot 75}{100} < 4\right) =$$

$$= P\left(-4\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{225}} < \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{225}}\frac{X_1 + \ldots X_{100} - 100\cdot 75}{100} < 4\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{225}}\right) = P\left(-\frac{4\cdot 10}{15} < Z_{100} < \frac{4\cdot 10}{15}\right) =$$

$= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{8}{3}\right) = \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{8}{3}\right)\right)$, por la simetría de distribución normal de media 0 y varianza 1. Consultando las tablas obtenemos

$$P(|\bar{X} - 75| < 4) = 2\cdot\Phi(2,67) - 1 = 2\cdot 0,99621 - 1 = 0{,}99242$$

6. *(1 punto)* El número de pasajeros que usan diariamente un autobús urbano es una variable aleatoria que sigue aproximadamente una distribución normal. En 12 días elegidos aleatoriamente se observa que la media muestral es $\overline{x} = 54,4$ y la cuasidesviación típica es $s_1 = 7,24$.

   Estima puntualmente y obtén un intervalo de confianza al 90 % para el número medio de pasajeros del autobús.

   Nota: Sea X una variable aleatoria con distribución t de Student con 11 grados de libertad. La siguiente tabla muestra los valores de su función de distribución en diferentes abscisas

x	0	0,7	0,9	0,95	1,363	1,7959
$P(X \leq x)$	0.5	0,75	0,81	0,819	0,9	0,95

Solución.-

Sea X la variable aleatoria "número de pasajeros que usan diariamente el autobús"

$X \sim N(\mu, \sigma)$, con ambos parámetros desconocidos.

Sabemos que

$$\frac{\overline{X} - \mu}{S_1/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

donde $\overline{X}$ es el estadístico media muestral y S_1 la cuasidesviación típica muestral.

Teniendo en cuenta la simetría de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución t_{n-1} y llamando $x_{0,95}$ a su cuantil de orden 0,95, será

$$P\left(-x_{0,95} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{S_1/\sqrt{n}} \leq x_{0,95}\right) = 0,9$$

$$P\left(\overline{X} - x_{0,95}\frac{S_1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + x_{0,95}\frac{S_1}{\sqrt{n}}\right) = 0{,}9$$

Un intervalo de confianza al 90 % para μ será

$$\left(\overline{x} - x_{0,95}\frac{s_1}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + x_{0,95}\frac{s_1}{\sqrt{n}}\right)$$

En la muestra, $\overline{x} = 54,4, \quad s_1 = 7,24 \quad y \quad n = 12$

Observando la tabla adjunta, $x_{0,95} = 1,7959$

$$\left(54.4 - 1.7959\ \frac{7.24}{\sqrt{12}}\ ,\ 54.4 + 1.7959\ \frac{7.24}{\sqrt{12}}\right) = (50.646,\ 58.154)$$

es el intervalo de confianza pedido y la estimación puntual de μ es $\overline{x} = 54,4$

7. *(1 punto)* Un partido obtuvo el 25 % de votos en las últimas elecciones. Se toma hoy una muestra de 500 electores y el 22 % votaría de nuevo a ese partido. Contrasta, con un nivel de significación de $\alpha = 0{,}05$, si la proporción de votantes de ese partido no se ha modificado.

   Solución.-

   Sea p la proporción de votantes del partido en la población.

   Debemos contrastar la hipótesis nula

   $H_0 : p = 0,25$

   frente a la hipótesis alternativa

   $H_1 : p \neq 0,25$

   Si H_0 es cierta y X el número de votos obtenidos por el partido en la muestra

$$\frac{X - 0,25n}{\sqrt{0,25(1-0,25)n}} \rightsquigarrow N(0,1)$$

   El valor del estadístico en la muestra es

$$\frac{0,22 \cdot 500 - 0,25 \cdot 500}{\sqrt{0,25(1-0,25) \cdot 500}} = -1{,}549$$

$$\text{p-valor} = 2 \cdot P(Z < -1,549) = 2F_Z(-1,549) = 2(1 - F_Z(1,549) \approx 2(1 - 0,12114) = 0,12114$$

   siendo F_Z la función de distribución de la variable aleatoria $Z \sim N(0,1)$.

   Como p-valor $> 0,05$, no hay evidencia para rechazar que la proporción de votantes del partido es del 25 %.

8. *(2 puntos)* Sea $X(t)$, con $t > 0$, un proceso Gaussiano estacionario de media cero y función de autocorrelación $R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$ y sea B una variable aleatoria normal de media cero, varianza σ^2 e independiente del proceso $X(t)$.

   Sea $Y(t) = a \cdot X(t) + B \cdot t$, siendo $t > 0$ y a una constante real distinta de 0.

   a) Halla la media y la función de autocorrelación de $Y(t)$. ¿Es un proceso E.S.A.?
   b) Halla las distribuciones de primer orden del proceso $Y(t)$.
   c) Halla la distribución de la variable aleatoria bidimensional $(X(1) + 2X(3),\ -3X(3) + 1)$.

   Solución.-

   a) $E[Y(t)] = aE[X(t)] + tE(B) = 0$

$$\begin{aligned}
R_Y(t, t+\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] = E[(aX(t) + Bt)(aX(t+\tau) + B(t+\tau))] \\
&= E[a^2X(t)X(t+\tau) + a(t+\tau)BX(t) + atBX(t+\tau) + t(t+\tau)B^2] \\
&= a^2E[X(t)X(t+\tau)] + a(t+\tau)E[BX(t)] + atE[BX(t+\tau)] + t(t+\tau)E[B^2] \\
&= a^2R_X(\tau) + a(t+\tau)E[B]E[X(t)] + atE[B]E[X(t+\tau)] + t(t+\tau)[\mathrm{Var}(B) + (E[B])^2] \\
&= a^2e^{-|\tau|} + t(t+\tau)\sigma^2
\end{aligned}$$

   En las dos últimas igualdades se ha tenido en cuenta que B y $X(t)$ son independientes, por consiguiente

$$E[BX(t+\tau)] = E[B]E[X(t+\tau)] = 0 \qquad \text{y} \qquad E[BX(t)] = E[B]E[X(t)] = 0$$

   El proceso no es E.S.A. porque R_Y no depende exclusivamente de τ .

b) Para cada valor de t fijo, la variable aleatoria $Y(t)$ se puede escribir como

$$Y(t) = \begin{pmatrix} a & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ B \end{pmatrix}$$

y el vector aleatorio$(X(t), B)$ sigue una distribución normal bidimensional puesto que $X(t)$ y B son variables aleatorias normales independientes.

$$\text{VAR}[X(t)] = R_X(0) - (E[X(t)])^2 = 1$$

$\text{COV}(X(t), B) = 0$, por ser $X(t)$ y B independientes.
Entonces,

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ B \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}\right)$$

Por tanto para cada valor de t fijo, $Y(t)$ sigue una distribución normal . Sus parámetros son:

$$E[Y(t)] = \begin{pmatrix} a & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Var}[Y(t)] = \begin{pmatrix} a & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} = a^2 + t^2\sigma^2$$

c) Se verifica que

$$\begin{pmatrix} X(1) + 2X(3) \\ -3X(3) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(1) \\ X(3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sabemos que $X(t)$ es un proceso normal estacionario con

$$E[X(t)] = 0, \quad \text{VAR}[X(t)] = 1 \quad \text{y} \quad \text{COV}(X(1), X(3)) = R_X(2) - E[X(t)]^2 = e^{-2}$$

De manera que si $\overline{\mu}$ es el vector de medias y M la matriz de covarianzas

$$\begin{pmatrix} X(1) \\ X(3) \end{pmatrix} \sim N_2\left(\overline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ M = \begin{pmatrix} 1 & e^{-2} \\ e^{-2} & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Se verifica que

$$\begin{pmatrix} X(1) + 2X(3) \\ -3X(3) + 1 \end{pmatrix} \sim N_2\left(\overline{\mu'}, M'\right)$$

siendo

$$\overline{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-2} \\ e^{-2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 4e^{-2} & -6 - 3e^{-2} \\ -6 - 3e^{-2} & 9 \end{pmatrix}$$