ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
EXAMEN FINAL (Otoño 2015-16) **Duración:** 3 horas
FECHA: 15 de Enero de 2016
Fecha publicación notas: 22 de Enero de 2016
Fecha revisión examen: 27 de Enero de 2016
APELLIDOS: **NOMBRE:**
DNI: **TITULACIÓN:**

SOLUCIONES

Ejercicio 1 *(1 punto) En una carrera sólo compiten los caballos A, B, C y D y las probabilidades de ganar son $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.1$ y $P(D) = 0.2$. Se realizan tres carreras independientes.*

(a) *Encuentra la probabilidad de que el mismo caballo gane las tres carreras.*

Solución.

Para cada $i = 1, 2, 3$, sean los sucesos
$A_i =$ el caballo A gana la carrera i-ésima
$B_i =$ el caballo B gana la carrera i-ésima
$C_i =$ el caballo C gana la carrera i-ésima
$D_i =$ el caballo D gana la carrera i-ésima

El suceso que el mismo caballo gane las tres carreras, S, se expresa como

$$S = \{A_1 \cap A_2 \cap A_3, B_1 \cap B_2 \cap B_3, C_1 \cap C_2 \cap C_3, D_1 \cap D_2 \cap D_3\}.$$

Entonces, y puesto que los sucesos considerados son incompatibles dos a dos

$$P(S) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3) + P(C_1 \cap C_2 \cap C_3) + P(D_1 \cap D_2 \cap D_3)$$

Por ser las carreras independientes

$$P(S) = P(A)^3 + P(B)^3 + P(C)^3 + P(D)^3 = 0.2^3 + 0.5^3 + 0.1^3 + 0.2^3 = 0.08 + 0.125 + 0.01 + 0.08 = 0.142$$

(b) *Halla la probabilidad de que A, B y C ganen una carrera cada uno.*

Solución.

Sea el suceso $S_1 = A_1 \cap B_2 \cap C_3$ que la primera carrera la gane A, la segunda B y la tercera C, por ser las carreras independientes $P(S_1) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0.2 \cdot 0.5 \cdot 0.1 = 0.01$. El suceso, R, de que A, B y C gane una carrera cada uno son todas las posibles ordenaciones de la terna A, B y C. Por tanto,

$$P(R) = P_3 \cdot P(S_1) = 3! \cdot 0.01 = 0.06$$

Ejercicio 2 *(1.5 puntos) Una agencia inmobiliaria dedicada a la venta de apartamentos en la costa ha realizado un estudio de ventas, comprobando que solo el 5 % de las visitas que ven el piso piloto compran un apartamento. Todas las visitas se consideran independientes. Se pide:*

(a) Calcular la probabilidad de que tenga que recibir 10 visitas hasta vender un apartamento.

Solución.

Sea X el número de visitas hasta vender un apartamento, X es $G(p = 0.05)$

$$P(X = 10) = p\ q^9 = 0.03151$$

(b) Calcular la probabilidad de que tenga que recibir 10 visitas hasta vender dos apartamentos.

Solución.

Sea Z el número de visitas hasta vender dos apartamentos, Z es $BN(k = 2, p = 0.05)$

$$P(Z = 10) = \binom{9}{1} p^2\ q^8 = 0.01493$$

(c) Si se han tenido que recibir 10 visitas para vender 2 apartamentos. ¿Cuál es la probabilidad de que las 3 primeras visitas no efectuaran ninguna compra?

Solución.

Equivale a que las tres primeras han sido fracasos y en las siete restantes dos éxitos siendo uno de ellos la última visita es decir

$$P(Z > 3 \quad \text{sin éxito en las tres primeras} \quad | Z = 10) =$$

$$= \frac{q\ q\ q \binom{6}{1} p^2\ q^5}{P(Z = 10)} = \frac{6}{9}$$

Ejercicio 3 *(1 punto)*

Sea X una variable aleatoria con la siguiente función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 6 \cdot x + k & \textit{si } 0 \leq x \leq k \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

(a) Halla el valor de k.

Solución.

Imponemos que 1 sea $P(0 \leq X \leq k)$

$$\int_0^k (6 \cdot x + k)\ dx = 3 \cdot x^2 + k \cdot x\Big|_0^k = 3 \cdot k^2 + k^2 = 4 \cdot k^2 = 1 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \pm\frac{1}{2}$$

Solo nos vale la solución $k = \frac{1}{2}$, porque k debe ser mayor que cero.

(b) Calcula $P(0.2 \leq X \leq 0.6)$.

Solución.

$$P(0.2 \leq X \leq 0.6) = \int_{0.2}^{0.5} (6 \cdot x + \frac{1}{2})\ dx + \int_{0.5}^{0.6} 0\ dx = \left(3 \cdot x^2 + \frac{x}{2}\right)\Big|_{0.2}^{0.5} + 0 =$$

$$= 3 \cdot \frac{21}{100} + \frac{0.5 - 0.3}{2} = \frac{63 + 15}{100} = 0.78$$

(c) *Halla la media y la desviación típica de la variable aleatoria $Y = 2 \cdot X + 1$.*

Solución.

Por la propiedad lineal del operador esperanza, $E[Y] = E[2 \cdot X + 1] = 2E[X] + 1$.

$$E[X] = \int_0^{0.5} x \cdot (6 \cdot x + \frac{1}{2})\, dx = 2x^3 + \frac{x^2}{4}\Big|_0^{0.5} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} = \frac{5}{2^4} = 0.3125$$

Así, $E[Y] = 2E[X] + 1 = 2 \cdot \frac{5}{2^4} + 1 = \frac{13}{2^3} = 1.625$.

$$Var[Y] = 4 \cdot Var[X] = 4 \cdot (E[X^2] - E[X]^2) = 4 \cdot (E[X^2] - 0.3125^2)$$

$$E[X^2] = \int_0^{0.5} x^2 \cdot (6 \cdot x + \frac{1}{2})\, dx = 6\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\Big|_0^{0.5} = 3\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3 \cdot 2^4} = \frac{11}{2^5 \cdot 3} \backsimeq 0.11458333$$

Por tanto, $Var[Y] = 4 \cdot (E[X^2] - 0.3125^2) = 4 \cdot \left(\frac{11}{2^5 \cdot 3} - \frac{25}{2^8}\right) = \frac{13}{2^6 \cdot 3} = \frac{13}{192} \backsimeq 0.067708333$.

Con lo que la desviación típica de Y es $\sigma_Y = +\sqrt{Var[Y]} = 0.260208249$.

Ejercicio 4 *(1.5 puntos) Se lanza un dado y se definen las variables aleatorias*

$$X = \begin{cases} 0 & \textit{si el resultado es par} \\ 1 & \textit{si el resultado es impar} \end{cases} \qquad Y = \begin{cases} 0 & \textit{si el resultado es menor o igual que 3} \\ 1 & \textit{si el resultado es 4} \\ 2 & \textit{si el resultado es 5 ó 6} \end{cases}$$

(a) *Calcula la función de probabilidad conjunta de (X, Y).*

Solución. Los posibles resultados del dado, junto con los valores de las v.a. son:

Dado	X	Y
1	1	0
2	0	0
3	1	0
4	0	1
5	1	2
6	0	2

Teniendo en cuenta que cada resultado al lanzar el dado tiene probabilidad $\frac{1}{6}$, podemos escribir la función de probabilidad conjunta de (X, Y)

Y \ X	0	1
0	1/6	1/3
1	1/6	0
2	1/6	1/6

(b) *Estudia si X e Y son independientes.*

Solución. Las variables X e Y no son independientes porque no se verifica la igualdad

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i) \cdot P(Y = j)$$

para todos los valores $i = 0, 1; j = 0, 1, 2$.
Por ejemplo, $P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{6}, P(X = 0) = \frac{1}{2}, P(Y = 1) = \frac{1}{6}$ y se verifica que

$$\frac{1}{6} = P(X = 0, Y = 1) \neq P(X = 0) \cdot P(Y = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

(c) *Calcula $P(X \leq Y)$.*

Solución.

$$P(X \leq Y) = 1 - P(X = 1, Y = 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(d) *Calcula $Cov(X, Y)$.*

Solución. Como $Cov(X, Y) = E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y]$, calculamos cada término por separado:

$$E[X \cdot Y] = \sum_{i,j} i \cdot j \cdot P(X = i, Y = j) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$E[X] = \sum_{i} i \cdot P(X = i) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E[Y] = \sum_{j} j \cdot P(Y = j) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Entonces, $Cov(X, Y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{-1}{12}$

Ejercicio 5 *(1.5 puntos) Sean X, Y y N tres variables aleatorias que verifican $Y = X + N$, donde X es la señal emitida, Y es la señal observada y N es un ruido.*

Se sabe que X y N son variables aleatorias independientes y que,

$$X \sim N(\mu_X, \sigma_X), \qquad N \sim N(\mu_N, \sigma_N), \text{ con } \sigma_X \neq \sigma_N$$

(a) *Obtén la distribución conjunta de (X, Y).*

Solución.

Por ser X y N variables aleatorias normales independientes, es

$$\begin{pmatrix} X \\ N \end{pmatrix} \sim N_2 \left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_N^2 \end{pmatrix} \right)$$

Como

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X + N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ N \end{pmatrix}$$

se verifica que

$$\begin{pmatrix} X \\ X+N \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & 0 \\ 0 & \sigma_N^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Esto es,

$$\begin{pmatrix} X \\ X+N \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} \mu_X \\ \mu_X+\mu_N \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_X^2 \\ \sigma_X^2 & \sigma_X^2+\sigma_N^2 \end{pmatrix}\right)$$

(b) *Calcula el coeficiente de correlación entre X e Y en términos de σ_X y σ_N.*

Solución.

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X \cdot \sqrt{\sigma_X^2+\sigma_N^2}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_N^2}}$$

(c) *Expresa el coeficiente de correlación entre X e Y en función del cociente señal-ruido (σ_X/σ_N).*

Solución.

$$\rho(X,Y) = \frac{\sigma_X}{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_N^2}} = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_N^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma_N}{\sigma_X}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sigma_X/\sigma_N}\right)^2}}$$

(d) *Cuando la varianza del ruido es despreciable frente a la varianza de la señal emitida, ¿qué ocurre con el valor del coeficiente de correlación? Interpreta esto en términos de la relación lineal entre X e Y.*

Solución.

Cuando $\sigma_N <<<<< \sigma_X$ se verifica que $\rho(X,Y)$ está próximo a 1 y la relación lineal entre la señal emitida y la observada es grande.

Ejercicio 6 *(1 punto) Una variable aleatoria X depende de un parámetro desconocido θ y se sabe que el estadístico $T = \dfrac{\theta - \bar{X}}{n}$ se distribuye como una normal de media 0 y varianza 1. Halla un intervalo de confianza para θ, con nivel de confianza del 90 %, siendo 10, 12, 14, 16, 18 y 20 una muestra de X.*

Solución.

$n = 6 \Rightarrow T = \dfrac{\theta - \bar{X}}{n} \sim \mathcal{N}\ (0,1)$.

Por ser el nivel de confianza $0.90 = 1-\alpha \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0.05$. Los cuantiles 0.05 y 0.95 de una distribución normal de media 0 y varianza 1 son -1.64 y 1.64, respectivamente. Entonces,

$$0.90 = P\left(-1.64 \leq \frac{\theta - \bar{X}}{6} \leq 1.64\right) =$$

$$= P\left(\bar{X} - 6 \cdot 1.64 \leq \theta \leq \bar{X} + 6 \cdot 1.64\right)$$

$Media(\{10, 12, 14, 16, 18, 20\}) = 15 = \bar{x}$, por tanto

$$I.C._{0.90}(\theta) = (15 \pm 6 \cdot 1.64) = (15 \pm 9.84) = (5.16,\ 24.84)$$

Ejercicio 7 *(1 punto) Se miden los tiempos de reacción, en milisegundos, de 17 sensores frente al estímulo correspondiente y se obtienen unos valores de* $\bar{x} = 505.35$ *y* $s_1 = 42.54$*. Suponiendo que el tiempo de reacción se distribuye normalmente, determina un intervalo de confianza para la varianza con un nivel de confianza del 90 %.*

Nota 1 *Sea* Y *una variable aleatoria con distribución* χ^2 *con 16 grados de libertad. La siguiente tabla muestra los valores de su función de distribución en diferentes abcisas*

y	*7.96*	*9.31*	*15.33*	*23.54*	*26.3*
$P(Y \leq y)$	*0.05*	*0.1*	*0.5*	*0.9*	*0.95*

Solución.

El intervalo de confianza para la varianza de una distribución normal, con un nivel de confianza del 90 %, viene dado por:

$$\left(s_1^2 \, \frac{n-1}{q_{0.95}}, \; s_1^2 \, \frac{n-1}{q_{0.05}} \right)$$

donde $q_{0.05}$ y $q_{0.95}$ son los cuantiles de orden 0.05 y 0.95 de una distribución χ^2_{16}. Por lo tanto, el intervalo de confianza pedido es:

$$\left(42.54^2 \, \frac{16}{26.3} \; , \; 42.54^2 \, \frac{16}{7.96} \right) = (1100.9 \; , \; 3637.5)$$

Ejercicio 8 *(1.5 puntos) Sea* X *una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (0,1) y sea el proceso estocástico* $Y(t) = X^{2t}, \quad t \geq 0$.

(a) Calcula $E[Y(t)]$ *y* $R_Y(t, t+\tau)$.

Solución.

La función de densidad de la variable X es

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Entonces,

$$E[Y(t)] = E[X^{2t}] = \int_0^1 x^{2t} \, dx = \left. \frac{x^{2t+1}}{2t+1} \right|_0^1 = \frac{1}{2t+1}.$$

$$R_Y(t, t+\tau) = E[Y(t) \cdot Y(t+\tau)] = E[X^{2t} \cdot X^{2(t+\tau)}] = E[X^{4t+2\tau}] = \int_0^1 x^{4t+2\tau} \, dx =$$

$$= \left. \frac{x^{4t+2\tau+1}}{4t+2\tau+1} \right|_0^1 = \frac{1}{4t+2\tau+1}.$$

(b) *Calcula $Var[Y(t)]$. ¿Es $Y(t)$ estacionario en sentido amplio?*

Solución.

Como $Var[Y(t)] = R_Y(t,t) - E[Y(t)]^2$ simplemente sustituyendo los resultados del apartado anterior tenemos que

$$Var[Y(t)] = \frac{1}{4t+1} - \left(\frac{1}{2t+1}\right)^2$$

El proceso $Y(t)$ no es estacionario en sentido amplio puesto que tanto $E[Y(t)]$ como la función de autocorrelación del proceso dependen de t.

(c) *Calcula $P\left(Y(2) \leq \frac{1}{16}\right)$.*

Solución.

$P(Y(2) \leq \frac{1}{16}) = P(X^4 \leq \frac{1}{16}) = P(|X| \leq \frac{1}{2}) = P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} 1 \; dx = \frac{1}{2}.$

(d) *Analiza si es estacionario en sentido amplio el proceso aleatorio $Z(t) = \dfrac{Y(t+1)}{Y(t)}$.*

Solución. El proceso $Z(t)$ se puede expresar como $Z(t) = \dfrac{Y(t+1)}{Y(t)} = \dfrac{X^{2(t+1)}}{X^{2t}} = X^2$. Entonces,

$\mu_Z = E[X^2] = \displaystyle\int_0^1 x^2 \cdot 1 \; dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$

$R_Z(t, t+\tau) = E[Z(t) \cdot Z(t+\tau)] = E[X^2 \cdot X^2] = E[X^4] = \displaystyle\int_0^1 x^4 \; dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}.$

El proceso $Z(t)$ es estacionario en sentido amplío porque tanto la media, como la función de autocorrelación, no dependen del instante t.