Departamento de Matemática Aplicada a la I.T.T.

ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

Convocatoria: JULIO 2011 **Duración:** 3 horas

Fecha: 28 de Junio de 2011

Fecha publicación de notas: 5 de Julio de 2011 **Fecha de revisión:** 8 de Julio de 2011

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: **TITULACIÓN:**

SOLUCIÓN

---

1. Un sistema óptico binario contabiliza el número, K, de electrones emitidos por una célula fotoeléctrica sobre la que incide la luz en un intervalo fijo de tiempo. Cuando se transmite un 1 (denominamos E_1 a este suceso) K sigue una distribución de Poisson de parámetro 8 y cuando se transmite un 0, K sigue una Poisson de parámetro 0'1. Suponemos que es igual de probable emitir un 0 que un 1. Una vez efectuada la transmisión, y contabilizándose k electrones, el receptor interpreta que se transmitió un 1 si contabilizan 2 o más electrones ($k \geq 2$), y que se transmitió un 0 si contabilizan 0 o 1.

   a) *(0.5 puntos)* Calcula la probabilidad de error en la transmisión de un dígito.

   Solución: Sea I_i = interpretar i, con $i = 0,\ 1$.

   X_0 una Poisson de parámetro $0,1$ y X_1 una Poisson de parámetro 8.

   $P(\text{error}) = P(E_0 \cap I_1) + P(E_1 \cap I_0) = P(E_0) * P(I_1/E_0)) + P(E_1) * P(I_0/E_1)) =$
   $= \dfrac{1}{2}P(X_0 \geq 2) + \dfrac{1}{2}P(X_1 < 2) = \dfrac{1}{2}[1 - P(X_0 = 0) - P(X_0 = 1) + P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1)] =$
   $\dfrac{1}{2}[1 - e^{-0,1} * (1 + 0,1) + e^{-8} * (1 + 8)] \backsimeq \dfrac{1}{2}(0,0046 + 0,0030) = 0,0038$

   b) *(0.5 puntos)* Calcula la probabilidad de error en la transmisión de una palabra que consta de 8 dígitos. (Se supone independencia estadística en la transmisión de cada uno de los dígitos).

   Solución: Si N = nº de errores en una palabra de 8 dígitos y dígito erróneo es considerado éxito, entonces N = nº de éxitos en 8 pruebas, por lo que N es una v.a. binomial de parámetros 8 y $0,0038$.

   $P(\text{error en la palabra}) = P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) =$
   $= 1 - \binom{8}{0} * 0,0038^0 * (1 - 0,0038)^8 = 1 - (1 - 0,0038)^8 = 0,03038$

2. Se tira un dado y después tantas monedas como puntuación del dado se haya obtenido. Por ejemplo, si sale un 2 se lanzan dos monedas.

a) *(0.4 puntos)* Calcula la probabilidad de obtener 3 caras y 3 cruces.

Solución: Sean los sucesos D_i = nº de puntos al lanzar el dado $\Rightarrow \{D_i/i = 1, \dots 6\}$ es un sistema completo de sucesos. Si SA es el suceso obtener 3 caras y tres cruces y aplicando el Teorema de la Probabilidad Total obtenemos

$$P(SA) = \sum_{i=1}^{6} P(D_i) * P(SA/D_i) = \sum_{i=1}^{5} P(D_i) * 0 + P(D_6) * P(SA/D_6) =$$

$$= \frac{1}{6} * \binom{6}{3} \frac{1}{2^3} \frac{1}{2^3} = \frac{5}{96} \backsimeq 0,052083$$

b) *(0.4 puntos)* Calcula la probabilidad de obtener 4 caras (exactamente 4 caras pero no necesariamente ninguna cruz, por ejemplo podríamos obtener con el dado un 5 y después 4 caras y una cruz).

Solución: Sea el suceso SB obtener 4 caras. Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total obtenemos

$$P(SB) = \sum_{i=1}^{6} P(D_i) * P(SB/D_i) = \sum_{i=1}^{3} P(D_i) * 0 + \sum_{i=4}^{6} P(D_i) * P(SB/D_i) =$$

$$= \frac{1}{6} * \frac{1}{2^4} + \frac{1}{6} * \binom{5}{4} \frac{1}{2^4} \frac{1}{2} + \frac{1}{6} * \binom{6}{4} \frac{1}{2^4} \frac{1}{2^2} = \frac{1}{6} * \left(\frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{15}{2^6} \right) = \frac{29}{384} \backsimeq 0,075587$$

c) *(0.4 puntos)* Supuesto se han obtenido 4 caras (y no necesariamente 0 cruces) calcula la probabilidad de que se haya obtenido un 5 al lanzar el dado.

Solución: Aplicando el Teorema de Bayes

$$P(D_5/SB) = \frac{P(D_5) * P(SB/D_5)}{P(SB)} = \frac{\frac{1}{6} * \binom{5}{4} \frac{1}{2^4} \frac{1}{2}}{\frac{29}{384}} = \frac{10}{29} \backsimeq 0,3448$$

d) *(0.4 puntos)* Calcula la probabilidad de obtener cuatro caras y una cruz.

Solución: Sea el suceso SD cuatro caras y una cruz. Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total obtenemos

$$P(SD) = \sum_{i=1}^{6} P(D_i) * P(SD/D_i) = \sum_{i=1}^{4} P(D_i) * 0 + P(D_5) * P(SD/D_5) + P(D_6) * 0 =$$

$$= \frac{1}{6} * \binom{5}{4} \frac{1}{2^4} \frac{1}{2} = \frac{5}{192} \backsimeq 0,02604$$

e) *(0.4 puntos)* Supuesto se ha obtenido un 5 al lanzar el dado, calcula el número medio de caras.

Solución: Si obtener cara es éxito y N es la v.a. nº de caras al lanzar 5 monedas, entonces N es una v.a. binomial de parámetros 5 y $\frac{1}{2}$. Entonces, $E[N] = 5 * \frac{1}{2} = 2,5$.

3. Se lanza una moneda hasta obtener cara. Sea C la variable aleatoria

$$\mathrm{C} \equiv \textit{número de cruces obtenidas antes de obtener cara.}$$

a) *(0.5 puntos)* Calcula $P(C > 10)$.

Indicación: $a^n + a^{n+1} + a^{n+2} + \ldots = \dfrac{a^n}{1-a}, \quad |a| < 1,\ n \in \mathbb{N}$.

Solución: $C = 11$ cuando se obtienen 11 cruces y después una cara. En consecuencia $P(C = 11) = 0,5^{12}$. De la misma forma se obtiene $P(C = 12) = 0,5^{13}, \ldots$ Entonces

$$P(C > 10) = P(C = 11) + P(C = 12) + \ldots = 0{,}5^{12} + 0,5^{13} + \ldots = \frac{0{,}5^{12}}{1-0,5} = 0,5^{11}$$

Una forma más directa de hacer el problema es utilizar que $C > 10$ cuando en las 11 primeras tiradas se obtiene cruz, y entonces $P(C > 10) = 0{,}5^{11}$.

b) *(0.5 puntos)* Calcula la función de distribución de C.

Solución: De la misma forma que en el apartado anterior se obtiene que $P(C > n) = 0{,}5^{n+1}$, para $n = 0, 1, \ldots$. Entonces

$$F_C(n) = P(C \leq n) = 1 - P(C > n) = 1 - 0{,}5^{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

y entonces $F_C(c) = \begin{cases} 1 - 0{,}5^{[c]+1}, & c \geq 0 \\ 0, & c < 0 \end{cases}$ donde $[c]$ denota la parte entera de c (mayor entero menor o igual a c).

4. Sea X una v.a. continua con función de densidad $f(x) = 3\,x^2,\ 0 \leq x < 1$.

a) *(0.5 puntos)* Calcula la función de distribución de X.

Solución: $F(x) = \displaystyle\int_0^x 3\xi^2 d\xi = x^3$ cuando $x \in [0, 1]$. Entonces $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$

b) *(0.5 puntos)* Calcula la media de X^2

Solución: $E[X^2] = \displaystyle\int_0^1 x^2 3x^2 dx = \frac{3}{5}$

c) *(0.5 puntos)* Calcula el cuantil 0,8 de X.

Solución: Se tiene que $P(X \leq c) = 0{,}8$ si y sólo si $F(c) = 0{,}8$ lo cual ocurre cuando $c^3 = 0{,}8$. Así el cuantil 0,8 es $c = \sqrt[3]{0{,}8} \approx 0{,}928$.

d) *(0.5 puntos)* Calcula $P(X < 0{,}8 \,/\, X > 0{,}2)$

Solución:

$$\begin{aligned} P(X < 0{,}8 \,/\, X > 0{,}2) &= \frac{P(X < 0{,}8 \cap X > 0{,}2)}{P(X > 0{,}2)} = \frac{P(0{,}2 < X < 0{,}8)}{1 - F(0{,}2)} \\ &= \frac{F(0{,}8) - F(0{,}2)}{1 - F(0{,}2)} = \frac{0{,}8^3 - 0{,}2^3}{1 - 0{,}2^3} \approx 0{,}508 \end{aligned}$$

5. Sean X e Y dos v.a. independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Calcula

a) *(0.5 puntos)* $E[X^2Y]$

Solución: Utilizando que X e Y son independientes se obtiene

$$E[X^2Y] = E[X^2]\,E[Y] = \int_0^1 x^2 dx\ \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

b) *(0.5 puntos)* $VAR\,[X - 4Y]$

Solución: Utilizando que X e Y son independientes se obtiene

$$\mathrm{VAR}\,[X - 4Y] = \mathrm{VAR}\,[X] + 16\,\mathrm{VAR}\,[Y] = \frac{1}{12} + \frac{16}{12} = \frac{17}{12}$$

c) *(0.5 puntos)* $P(X > 0'8, Y > 0'5)$

Solución: Utilizando que X e Y son independientes se obtiene

$$P(X > 0'8, Y > 0'5) = P(X > 0'8)\,P(Y > 0'5) = 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}1$$

d) *(1 punto)* $P(X^2 < Y)$

Solución: Utilizando que $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = 1, \quad x,y \in [0,1]$ (ya que X e Y son independientes), se obtiene

$$P(X^2 < Y) = \int_0^1 \int_{x^2}^1 dydx = \int_0^1 (1 - x^2)dx = \frac{2}{3}$$

6. Sea $X(t)$ un proceso estocástico normal y estacionario de media $E[X(t)] = 0$ y autocorrelación $R_X(\tau) = \dfrac{1}{1+\tau^2}$.

a) *(0.5 puntos)* Calcula $P(X(1) - X(0) < 2)$

Solución: Por ser $X(t)$ un proceso estocástico normal $X(1) - X(0)$ es una v.a. normal.

$E[X(1) - X(0)] = E[X(1)] - E[X(0)] = 0 - 0 = 0.$

$V[X(1) - X(0)] = V[X(1)] + V[X(0)] - 2Cov[X(1),\ X(0)] = R_X(0) + R_X(0) - 2R_X(1) =$
$= 2 - 2\dfrac{1}{1+1} = 1$

Así, $X(1) - X(0)$ es una v.a. normal tipificada y, consultando las tablas,

$$P(X(1) - X(0) < 2) = P(Z < 2) = 0,97725$$

b) *(1 punto)* Calcula la matriz de covarianzas del vector aleatorio $[\,X(0)\,,\ X(1) - X(0)\,]$.

Solución: $V[X(0)] = R_X(0) - E[X(0)]^2 = 1$ y ya se ha probado que $V[X(1) - X(0)] = 1$

$Cov[X(0),\ X(1) - X(0)] = E[X(0) * (X(1) - X(0))] - E[X(0)] * E[X(1) - X(0)] =$
$= E[X(0) * X(1) - X(0)^2] - 0 = E[X(0) * X(1)] - E[X(0)^2] = R_X(1) - R_X(0) = \dfrac{1}{1+1} - 1 =$
$= -\dfrac{1}{2}$

Por lo que la matriz de covarianzas del vector $[\,X(0)\,,\ X(1) - X(0)\,]$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$