Departamento de Matemática Aplicada a la I.T.T.

ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

EXAMEN FINAL JULIO (2012) **Duración:** 2 horas 30 minutos

FECHA: 2 de Julio de 2012

Fecha publicación notas: 6 de Julio de 2012 **Fecha revisión examen:** 11 de Julio de 2012

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: **TITULACIÓN:**

En cada pregunta hay que justificar la respuesta, en el hueco correspondiente, con los cálculos y explicaciones apropiadas.

Ejercicio 1 *Consideremos una prueba para ciertos componentes electrónicos que da resultado positivo con probabilidad 0'98 si el componente es defectuoso y con probabilidad 0'001 si no lo es. Supongamos que la probabilidad de que un componente sea defectuoso (D) es de 0'01 y que los componentes son estadísticamente independientes. Se realiza la prueba a 10.000 componentes y se desechan aquellos en los que la prueba ha resultado positiva, aceptándose (A) el resto.*

1. *(0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que un componente aceptado, sea defectuoso.*
2. *(0.5 puntos) Obtener la expresión, dejando indicada la operación, de la probabilidad de aceptar 9.900 componentes.*
3. *(0.5 puntos) Calcular el número medio de componentes defectuosos aceptados de entre los 10.000*

Sabemos que $P(\overline{A}/D) = 0'98, \quad P(\overline{A}/\overline{D}) = 0'001, \quad P(D) = 0'01.$

1.

$$P(D/A) = \frac{P(A\cap D)}{P(A)} = \frac{P(A/D)P(D)}{P(A/D)P(D) + P(A/\overline{D})P(\overline{D})} = \frac{0'02\cdot 0'01}{0'02\cdot 0'01 + 0'999\cdot 0'99} = 0{,}000202$$

2. Sea X la variable aleatoria "número de componentes aceptados de entre los 10000"

   $X \sim \text{Bin}(n = 10000, p)$, donde $p = P(A) = 0{,}98921$

$$P(X = 9900) = \binom{10000}{9900} 0{,}98921^{9900}(1 - 0{,}98921)^{100}$$

3. Sea Y la variable aleatoria "número de componentes defectuosos aceptados de entre los 10000"

   $Y \sim \text{Bin}(n = 10000, p_1)$

   donde $p_1 = P(A\cap D) = P(A/D)P(D) = 0'02\cdot 0'01 = 0{,}0002$

$$E(Y) = np_1 = 10000\cdot 0{,}0002 = 2$$

Ejercicio 2 *La longitud (en cm) de las piezas fabricadas en un proceso de producción tiene la siguiente función de densidad:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x^4} & si\ x \geq 1 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

1. *(0.5 puntos) Si las piezas aceptables deben tener longitud entre 1 y 2 cm, ¿cuál es el porcentaje de piezas aceptables fabricadas?*
2. *(0.5 puntos) Calcula la longitud media de las piezas fabricadas.*
3. *(0.5 puntos) Calcula la mediana (o segundo cuartil) de la distribución.*

1.
$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{3}{x^4}\, dx = -x^{-3}\Big|_1^2 = 7/8$$

2.
$$E(X) = \int_1^{+\infty} \frac{3x}{x^4}\, dx = \frac{3x^{-2}}{-2}\Bigg|_1^{+\infty} = 3/2$$

3. Denotando por m la mediana de X

$$\frac{1}{2} = P(X \leq m) = \int_1^m \frac{3}{x^4}\, dx = -x^{-3}\Big|_1^m = 1 - \frac{1}{m^3}$$

$$\frac{1}{m^3} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \sqrt[3]{2} = 1,2599$$

Ejercicio 3 *Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad conjunta:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{4} & si\ -1 < x < 1, \quad x^2 < y < 1, \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

1. *(0.5 puntos) Calcula las distribuciones marginales,¿son X e Y independientes?*
2. *(1 punto) Calcula $P(Y \leq X)$*

1. $f_X(x) = \displaystyle\int_{x^2}^1 \frac{3}{4}\, dy = \frac{3}{4}(1 - x^2), \qquad -1 < x < 1$

   $f_Y(y) = \displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{3}{4}\, dx = \frac{3}{4}(\sqrt{y} + \sqrt{y}) = \frac{3}{2}\sqrt{y}, \qquad 0 < y < 1$

   Las variables X e Y no son independientes puesto que $f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$.

2. $P(Y \leq X) = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^x \frac{3}{4} dy \right)\, dx = \int_0^1 \frac{3}{4}(x - x^2)\, dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{8}$

Ejercicio 4 *Se lanza un dado equilibrado. Sean X e Y dos variables aleatorias definidas por*

$$X = \begin{cases} -1 & \textit{si el resultado es impar} \\ 1 & \textit{si el resultado es par} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} -1 & \textit{si el resultado es } 1,\ 2 \textit{ ó } 3 \\ 0 & \textit{si el resultado es } 4 \\ 1 & \textit{si el resultado es } 5 \textit{ ó } 6 \end{cases}$$

1. *(0.5 puntos) Halla la función de probabilidad conjunta de (X, Y).*

2. *(0.5 puntos) Halla las distribuciones marginales.*

3. *(0.5 puntos) Calcula $P(X + Y = 0/Y \leq 0)$.*

1. La variable aleatoria (X, Y) está definida del siguiente modo:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \stackrel{(X,Y)}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^2 \\ 1 & \longrightarrow & (-1,-1) \\ 2 & \longrightarrow & (1,-1) \\ 3 & \longrightarrow & (-1,-1) \\ 4 & \longrightarrow & (1,0) \\ 5 & \longrightarrow & (-1,1) \\ 6 & \longrightarrow & (1,1) \end{array}$$

Su función de probabilidad vendrá dada por:

$Y \backslash X$	-1	1
-1	$1/3$	$1/6$
0	0	$1/6$
1	$1/6$	$1/6$

2. La distribución marginal de X es

$P(X = -1) = P(X = -1, Y = -1) + P(X = -1, Y = 0) + P(X = -1, Y = 1) = 1/2$

$P(X = 1) = P(X = 1, Y = -1) + P(X = 1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 1) = 1/2$

La distribución marginal de Y es

$P(Y = -1) = P(X = -1, Y = -1) + P(X = 1, Y = -1) = 1/2$

$P(Y = 0) = P(X = -1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) = 1/6$

$P(Y = 1) = P(X = -1, Y = 1) + P(X = 1, Y = 1) = 1/3$

3.

$$P(X + Y = 0/Y \leq 0) = \frac{P(X + Y = 0, Y \leq 0)}{P(Y \leq 0)} = \frac{P(X = 1, Y = -1)}{P(Y = -1) + P(Y = 0)} = \frac{1/6}{2/3} = 1/4$$

Ejercicio 5 *Al fabricar ciertos componentes se produce un material contaminante (cinc) que se sospecha puede estar pasando al agua de un lago próximo. Se supone que la concentración de cinc en el agua, en gramos por milímetro cúbico, se distribuye según una normal de media μ y varianza σ^2=0.09. La concentración media de cinc obtenida al tomar una muestra de agua en 36 localizaciones diferentes del lago es 2.6 gramos por milimetro cúbico.*

1. *(0.5 puntos) Calcula un intervalo de confianza al 95 % para la concentración media de cinc en el lago.*

2. *(0.5 puntos) Obtén el tamaño mínimo de la muestra, n, para que el radio del intervalo de confianza al 95 % sea menor que* $0'05$.

1. Sea μ la concentración media de cinc en todo el lago que queremos estimar. Con los datos que tenemos, resultaría:
$$2'6 - 1'96 \cdot \frac{\sqrt{0'09}}{\sqrt{36}} < \mu < 2'6 + 1'96 \cdot \frac{\sqrt{0'09}}{\sqrt{36}}$$
Luego el intervalo de confianza al 95 % para μ será: $(2'502, 2'698)$

2. Con las condición del enunciado, resultaría:
$$|\mu - 2'6| < 0'05 \Rightarrow 1'96 \cdot \frac{0'3}{\sqrt{n}} < 0'05 \Rightarrow n > 138'29$$
Por tanto, $n = 139$.

Ejercicio 6 *Sea* $X(t) = At$ *un proceso aleatorio donde* A *es una variable aleatoria continua con distribución uniforme en* $(0,1)$.

1. *(0.5 puntos) Calcula* $P(X(3) < 1)$.

2. *(0.5 puntos) Calcula la media, autocorrelación y varianza de* $X(t)$. *¿Es estacionario en algún sentido?*

3. *(0.5 puntos) ¿Cuánto vale* $\mathrm{COV}(X(1), X(4))$*?*

1. $P(X(3) < 1) = P(A \cdot 3 < 1) = P(A < \frac{1}{3}) = \dfrac{1}{3}$
2.
$$E[X(t)] = t \cdot E[A] = \frac{t}{2},$$
$$R_X(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] = t(t+\tau)E[A^2] = \frac{t^2 + t\tau}{3}$$
$$\mathrm{VAR}[X(t)] = t^2 \cdot \mathrm{VAR}[A] = t^2 \cdot \frac{1}{12},$$
No es estacionario en sentido amplio y, por tanto, tampoco es estacionario en sentido estricto.

3. Sustituyendo en la expresión de la autocorrelación, calculada en el apartado anterior, t por 1 y τ por 3, resulta:

$$\begin{aligned}\mathrm{COV}[X(1), X(4)] =& E[X(1)X(4)] - E[X(1)]E[X(4)] \\ =& R_X(1,4) - \frac{1}{2}\frac{4}{2} = \frac{1 \cdot 4}{3} - \frac{1}{2}\frac{4}{2} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Ejercicio 7 *Un proceso, $X(t)$, estacionario gaussiano de media 0 tiene una función de autocorrelación*

$$R_X(\tau) = 10e^{-0,1|\tau|}\cos(2\pi\tau)$$

1. *(1 punto) Encuentra la distribución de la variable aleatoria $(X(0), X(\frac{1}{2}), X(1))$*
2. *(0.5 puntos) Calcula $P(X(\frac{1}{4}) < 2,\ X(\frac{1}{2}) < 1)$*

1. Como $X(t)$ es un proceso gaussiano, $(X(0), X(\frac{1}{2}), X(1))$ es una variable aleatoria con distribución normal tridimensional con vector de medias $(0\ 0\ 0)^t$ y matriz de covarianzas (obsérvese que la autocovarianza coincide con la autocorrelación ya que $E[X(t)] = 0$) :

$$\begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(\frac{1}{2}) & R_X(1) \\ R_X(\frac{1}{2}) & R_X(0) & R_X(\frac{1}{2}) \\ R_X(1) & R_X(\frac{1}{2}) & R_X(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10e^{-\frac{0'1}{2}} & 10e^{-0'1} \\ -10e^{-\frac{0'1}{2}} & 10 & -10e^{-\frac{0'1}{2}} \\ 10e^{-0'1} & -10e^{-\frac{0'1}{2}} & 10 \end{pmatrix}$$

2. Como el proceso es normal, $X(\frac{1}{4})$ y $X(\frac{1}{2})$ son variables aleatorias normales con media 0 y $\sigma^2 = 10$, independientes ya que $\mathrm{COV}[X(\frac{1}{4}), X(\frac{1}{2})] = R_X(\frac{1}{4}) = 0$, luego:

   $P(X(\frac{1}{4}) < 2,\ X(\frac{1}{2}) < 1) = P(X(\frac{1}{4}) < 2) \cdot P(X(\frac{1}{2}) < 1) = P(Z < \frac{2}{\sqrt{10}}) \cdot P(Z < \frac{1}{\sqrt{10}}) \approx 0.46$