ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
EXAMEN EXTRAORDINARIO 2016-17 **Duración:** 3 horas
FECHA: 11 de Julio de 2017
Fecha publicación notas: 14 de Julio de 2017 **Fecha revisión examen:** 17 de Julio de 2017
APELLIDOS: **NOMBRE:**
DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *Un dado equilibrado de 4 caras (un tetraedro regular con caras numeradas del 1 al 4 y tal que la probabilidad de obtener cada uno de los 4 números es 1/4) se lanza dos veces. Denotamos por X_1 y X_2 a lo obtenido en la primera y en la segunda tirada respectivamente y por $Z = X_1 + X_2$ a la suma de lo obtenido en los dos lanzamientos*

a) (0.5 puntos) Calcula $P(Z = 5)$ y $P(X_1 = X_2/Z = 6)$.

b) (0.5 puntos) Calcula la función de probabilidad de Z y $E\big[\,|Z - 5|\,\big]$.

c) (0.7 puntos) Después de lanzar el dado dos veces y calcular $Z = X_1 + X_2$, se lanza una moneda equilibrada Z veces. Calcula la probabilidad del suceso $A \equiv$ obtener exactamente 6 caras.

Solución:

a) Aplicando la regla de Laplace o bien la independencia de las variables X_1 y X_2 se obtiene fácilmente que $P(X_1 = n, X_2 = m) = 1/16,\ \ n, m = 1, 2, 3, 4$. Entonces

$$P(Z = 5) = P(X_1 = 1, X_2 = 4) + P(X_1 = 2, X_2 = 3) \\ + P(X_1 = 3, X_2 = 2) + P(X_1 = 4, X_2 = 1) = 4/16 = 1/4$$

$$P(X_1 = X_2/Z = 6) = \frac{P(X_1 = 3, X_2 = 3)}{P(Z = 6)}$$

$$= \frac{P(X_1 = 3, X_2 = 3)}{P(X_1 = 2, X_2, = 4) + P(X_1 = 3, X_2, = 3) + P(X_1 = 4, X_2, = 2)} = \frac{1/16}{3/16} = \frac{1}{3}$$

Ambos resultados podrían obtenerse también aplicando directamente la regla de Laplace. Obsérvese que supuesto $Z = 6$, hay únicamente tres resultados posibles que son equiprobables y entonces $P(X_1 = 3, X_2 = 3/Z = 6) = 1/3$.

b) La función de probabilidad de Z viene dada por

$$P(Z = 2) = P(X_1 = 1, X_2, = 1) = 1/16$$
$$P(Z = 3) = P(X_1 = 1, X_2, = 2) + P(X_1 = 2, X_2, = 1) = 2/16$$
$$P(Z = 4) = P(X_1 = 1, X_2, = 3) + P(X_1 = 2, X_2, = 2) = P(X_1 = 3, X_2, = 1) = 3/16$$
$$P(Z = 5) = 4/16$$
$$P(Z = 6) = 3/16$$
$$P(Z = 7) = P(X_1 = 3, X_2, = 4) + P(X_1 = 4, X_2, = 3) = 2/16$$
$$P(Z = 8) = P(X_1 = 4, X_2, = 4) = 1/16$$

Entonces

$$E\big[\,|Z - 5|\,\big] = 3 \cdot \frac{1}{16} + 2 \cdot \frac{2}{16} + 1 \cdot \frac{3}{16} + 1 \cdot \frac{3}{16} + 2 \cdot \frac{2}{16} + 3 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{4}$$

c) Aplicando probabilidad total se tiene

$$P(A) = P(Z=6)P(A/Z=6) + P(Z=7)P(A/Z=7) + P(Z=8)P(A/Z=8)$$

El número de caras es una variable aleatoria con distribución binomial$(Z, 1/2)$. Así, si $Z = 6$ la probabilidad de obtener 6 caras es $(1/2)^6$, si $Z = 7$ la probabilidad de obtener 6 caras es $\binom{7}{6}(1/2)^7$ y si $Z = 8$ la probabilidad de obtener 6 caras es $\binom{8}{6}(1/2)^8$. Entonces

$$P(A) = \frac{3}{16}\frac{1}{2^6} + \frac{2}{16}\binom{7}{6}\frac{1}{2^7} + \frac{1}{16}\binom{8}{6}\frac{1}{2^8} = \frac{17}{1024} \approx 0.0166$$

Ejercicio 2

a) *(0.5 puntos) Calcula la probabilidad de que el área de un círculo sea mayor que π si su radio es una variable aleatoria R que sigue una distribución exponencial de media 4.*

b) *(0.5 puntos) Calcula el área media del círculo.*

c) *(0.5 puntos) Si el radio del círculo es mayor que 1, calcula la probabilidad de que el área sea menor que 2π.*

Solución:

a)

$$P(\pi R^2 > \pi) = P(R^2 > 1) = P(R > 1) + P(R < -1) = P(R > 1) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-x/4}\, dx = e^{-1/4} = 0.7788$$

b)

$$E(\pi R^2) = \pi E(R^2) = \pi \left[[E(R)]^2 + Var(R) \right] = \pi(16 + 16) = 32\pi$$

c)

$$\begin{aligned} P(\pi R^2 < 2\pi / R > 1) = P(R^2 < 2/R > 1) &= \frac{P[(-\sqrt{2} < R < \sqrt{2}) \cap (R > 1)]}{P(R > 1)} \\ &= \frac{P(1 < R < \sqrt{2})}{P(R > 1)} = \frac{\int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{4} e^{-x/4}\, dx}{\int_1^{+\infty} \frac{1}{4} e^{-x/4}\, dx} = \frac{-e^{-\sqrt{2}/4} + e^{-1/4}}{e^{-1/4}} \\ &= 1 - e^{\frac{1-\sqrt{2}}{4}} \approx 0.0984 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 *Se tiene una moneda en la que es igual de probable que esté equilibrada (suceso E) y que no lo esté. En este último caso la probabilidad de cara es* 0.1.

a) *(0.6 puntos) Sabiendo que se ha lanzado la moneda 6 veces y que se ha obtenido exactamente una cara, ¿es más probable que la moneda esté equilibrada o que no lo esté?*

Se establece la siguiente regla de decisión:
Si el número de caras en 6 lanzamientos es mayor o igual que 2, se decide que la moneda lanzada está equilibrada (suceso D), y si es 0 o 1, se decide que no está equilibrada.

b) *(0.3 puntos) Calcula la probabilidad de decidir que está equilibrada cuando realmente no lo está.*

c) *(0.3 puntos) Calcula la probabilidad de decidir que no está equilibrada cuando realmente lo está.*

d) *(0.3 puntos) Calcula la probabilidad de error utilizando esa regla de decisión.*

Solución:

a) Sea A el suceso: "se obtiene 1 cara en 6 lanzamientos de la moneda"

Tenemos que determinar cuál de las dos probabilidades $P(E/A)$ o $P(\overline{E}/A)$ es mayor.

Sea Y la variable aleatoria: "número de caras en 6 lanzamientos de la moneda equilibrada".

Sea Z la variable aleatoria: "número de caras en 6 lanzamientos de la moneda no equilibrada".

Sabemos que $Y \sim Bin(n=6, p=1/2)$, $\quad Z \sim Bin(n=6, p=0.1)$

$P(Y=i) = \binom{6}{i} 0.5^6, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 6$

$P(Z=i) = \binom{6}{i} (0.1)^i \cdot (0.9)^{6-i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, 6$

$$P(E/A) = \frac{P(A/E)P(E)}{P(A)} = \frac{P(Y=1)\cdot 1/2}{P(A)}$$

$$P(A) = P(A/E)P(E) + P(A/\overline{E})P(\overline{E}) = P(Y=1)\cdot\frac{1}{2} + P(Z=1)\frac{1}{2} = \binom{6}{1}0.5^6\cdot\frac{1}{2} + \binom{6}{1}0.1^1\cdot 0.9^5\cdot\frac{1}{2}$$

$$P(E/A) = \frac{\binom{6}{1}0.5^6\cdot\frac{1}{2}}{\binom{6}{1}0.5^6\cdot\frac{1}{2} + \binom{6}{1}0.1^1\cdot 0.9^5\cdot\frac{1}{2}} = \frac{0.5^6}{0.5^6 + 0.1\cdot 0.9^5} \approx 0.2092$$

Como los sucesos E/A y $\overline{E}/A$ son complementarios $P(\overline{E}/A) = 1 - P(E/A) \approx 0.7908$.

Así pues, si sale una cara en seis lanzamientos, es más probable que la moneda no esté equilibrada.

b)

$$\begin{aligned} P(D/\overline{E}) &= P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - [P(Z=0) + P(Z=1)] \\ &= 1 - \left(0.9^6 + 6\cdot 0.1\cdot 0.9^5\right) \approx 0.1143 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} P(\overline{D}/E) &= P(Y < 2) = P(Y=0) + P(Y=1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 + 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 \approx 0.1094 \end{aligned}$$

d)

$$P(error) = P(D\cap\overline{E}) + P(\overline{D}\cap E) = P(D/\overline{E})P(\overline{E}) + P(\overline{D}/E)P(E) = 0.5(0.1143 + 0.1094) \approx 0.1119$$

Ejercicio 4 *Sea $(X,\ Y)$ una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta*

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k & si\ \ 0 < y < x < 1 \\ 0 & en\ el\ resto \end{cases}$$

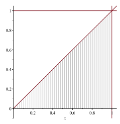
a) *(0.3 puntos) Halla k para que $f_{(X,Y)}$ sea función de densidad.*

b) *(0.5 puntos) Halla las funciones de densidad marginales. ¿Son las variables aleatorias X e Y independientes?*

c) *(0.7 puntos) Calcula $P(Y > X^2)$.*

Solución:

a) Para que $f_{(X,Y)}$ sea función de densidad tiene que verificarse $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dx\,dy = 1$. La función de densidad no se anula en el triángulo de la siguiente figura



$$\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=x} k\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} kx\,dx = k\frac{1}{2} = 1 \Longrightarrow k = 2 \Longrightarrow f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < y < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

b) Funciones de densidad marginales:

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dy = \int_{y=0}^{y=x} 2\,dy = 2x, \qquad 0 < x < 1$

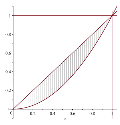
$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{(X,Y)}(x,y)\,dx = \int_{x=y}^{x=1} 2\,dx = 2 - 2y, \qquad 0 < y < 1$

X e Y son independientes cuando $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$.

$$f_X(x)\cdot f_Y(y) = 2x\cdot(2-2y) \neq 2 = f_{(X,Y)}(x,y)$$

luego, no son independientes.

c) El recinto del que nos piden la probabilidad y en el que no es nula la función de densidad conjunta es el de la figura siguiente



$$P(Y > X^2) = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=x^2}^{y=x} 2\,dy\,dx = \int_{x=0}^{x=1} 2(x - x^2)\,dx = 2\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{3}$$

Ejercicio 5 *(1 punto) La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X depende de un parámetro desconocido θ. Se sabe que el estadístico $T = \dfrac{\theta\cdot \max\{X_1,\ldots,X_n\}}{4}$ se distribuye como una χ^2 con $(n-1)$ grados de libertad (siendo $X_1,\ldots,X_n$ los valores de una muestra de X de tamaño n). Si 3, 4, 5, 7, 6, 8, 12, 5, 9 es una muestra aleatoria de X, halla un intervalo de confianza para θ, con un nivel de confianza del 92 %.*

Indicación: *Si Y es una variable aleatoria con distribución χ^2 con 8 grados de libertad, se cumple*

y	2.54	3.22	6.97	14.07	16.97
$P(Y \leq y)$	0.04	0.08	0.46	0.92	0.96

Solución:

$n = 9 \Rightarrow \dfrac{\theta \cdot \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}}{4} \sim \chi^2_8$. Para la muestra dada el estadístico es $T = \dfrac{\theta \cdot 12}{4} = 3 \cdot \theta$.

El nivel de confianza es $0,92 = 1 - \alpha \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0.04$. Los cuantiles 0.04 y 0.96 de una distribución de probabilidad χ^2 con 8 g. de l. son 2.54 y 16.97, respectivamente. Entonces,

$$0.92 = P\left(2.54 \leq \frac{\theta \cdot \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}}{4} \leq 16.97\right) = P\left(2.54 \cdot 4 \leq \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\} \cdot \theta \leq 16.97 \cdot 4\right)$$

$$= P\left(\frac{2.54 \cdot 4}{\text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}} \leq \theta \leq \frac{16.97 \cdot 4}{\text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}}\right)$$

Por tanto, el intervalo de confianza para θ, con un nivel de confianza del 92 % es

$$I.C._{0.92}(\theta) = \left(\frac{2.54 \cdot 4}{12}, \ \frac{16.97 \cdot 4}{12}\right) = (0.847, \ 5.657)$$

Ejercicio 6 *Para contrastar si la media de una variable aleatoria normal, de varianza 9, es igual a 20 se utiliza una muestra de tamaño 121, siendo la hipótesis alternativa* $\mu \neq 20$.

a) (0.2 puntos) ¿Qué estadístico se utiliza para el contraste?

b) (0.4 puntos) Considera un nivel de significación $\alpha = 0.06$*, ¿cuál será el intervalo de aceptación de la hipótesis nula?*

c) (0.4 puntos) Si $\bar{x} = 20.6$*, ¿se acepta la hipótesis nula de que la media de la población es 20? ¿Cuál es el p-valor del contraste? ¿Para qué niveles de significación podrías aceptar la hipótesis nula?*

Solución:

El contraste es

$$H_0 : \mu = 20$$
$$H_1 : \mu \neq 20$$

a) El estadístico del contraste es $T = \dfrac{\overline{X} - 20}{\sigma/\sqrt{n}} = \dfrac{\overline{X} - 20}{3/11}$. Si suponemos que la hipótesis nula es cierta el estadístico T se distribuye como una variable aleatoria normal de media cero y varianza 1.

b) Por ser $\alpha = 0.06$, los cuantiles $\dfrac{\alpha}{2} = 0.03$ y $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.97$ de una v.a. $\mathcal{N}(0, \ 1)$ son, mirando en las tablas y aplicando la simetría de la función de densidad, -1.88 y 1.88, respectivamente. Por lo que si el estadístico T pertenece al intervalo $(-1.88, \ 1.88)$ se aceptaría la hipótesis nula. Puesto que

$$-1.88 < T < 1.88 \Longleftrightarrow -1.88 \cdot \frac{3}{11} < \overline{X} - 20 < 1.88 \cdot \frac{3}{11} \Longleftrightarrow 20 - 1.88 \cdot \frac{3}{11} < \overline{X} < 20 + 1.88 \cdot \frac{3}{11}$$

Que el estadístico T pertenezca al intervalo $(-1.88, \ 1.88)$ es equivalente a que la media, $\overline{X}$, pertenezca al intervalo $(19.487, \ 20.513)$.

c) En este caso $\bar{x} = 20.6$, por lo que no pertenece al intervalo de aceptación, así que se rechaza que la media de la población es 20.
El valor del estadístico del contraste es $T = \dfrac{20.6 - 20}{3/11} = 2.2$. Si Z es una v.a. $\mathcal{N}(0, \ 1)$, con función de distribución $\Phi(z)$, el p-valor es $2 \cdot P(Z > 2.2) = 2 \cdot (1 - \Phi(2.2) = 2 \cdot (1 - 0.9861) = 0.0278$, por lo que se aceptaría la hipótesis nula para niveles de significación menores que 0.0278.

Ejercicio 7 *Sea* $X(t)$ *un proceso gaussiano estacionario de media* 0 *y función de autocorrelación*

$$R_X(\tau) = \begin{cases} 5(1 - |\tau|) & si \ |\tau| \leq 1 \\ 0 & si \ |\tau| > 1 \end{cases}$$

a) (0.4 puntos) Obtén las distribuciones de primer orden del proceso. Calcula $P(X(1) < -2)$.

b) (0.5 puntos) Calcula la distribución conjunta del vector $(X(1) + X(3/2), 2X(1) + 1)$.

c) (0.9 puntos) Sea $Z(t) = 2tX(t) - Y$ un proceso estocástico donde Y es una variable aleatoria independiente de $X(t)$ con distribución $N(1, \sigma = 2)$. Calcula $E[Z(t)]$ y $R_Z(t, t+\tau)$ ¿Es $Z(t)$ un proceso estacionario en sentido amplio?

Solución:

a) Al ser el proceso $X(t)$ gaussiano, las distribuciones de primer orden son normales unidimensionales de media $E[X(t)] = 0$ y $V(t) = R_X(t,t) = R_X(\tau = 0) = 5$.

Como $X(1) \sim N(0, \sigma = \sqrt{5})$ resulta que $P(X(1) < -2) = P(Z < \dfrac{-2}{\sqrt{5}}) = P(Z < -0.89) = 0.18673$ donde $Z \sim N(0,1)$.

b) Al ser el proceso $X(t)$ gaussiano, las distribuciones de segundo orden son normales bidimensionales. En concreto, la distribución del vector $\begin{pmatrix} X(1) \\ X(\frac{3}{2}) \end{pmatrix}$ es normal bidimensional con vector de medias $m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas $M = \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 5 \end{pmatrix}$.

El vector del que nos pieden calcular la distribución, $(X(1)+X(3/2), 2X(1)+1)$, es una transformación lineal del vector $(X(1), X(3/2))$. En concreto:

$$\begin{pmatrix} X(1) + X(\frac{3}{2}) \\ 2X(1) + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(1) \\ X(\frac{3}{2}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X(1) \\ X(\frac{3}{2}) \end{pmatrix} + B$$

Por tanto, la distribución del vector $(X(1) + X(3/2), 2X(1) + 1)$ es normal bidimensional con vector de medias

$A \cdot m + B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y matriz de varianzas $A \cdot M \cdot A^t = \begin{pmatrix} 15 & 15 \\ 15 & 20 \end{pmatrix}$.

c) En primer lugar vamos a calcular $E[Z(t)]$, $\quad E[Z(t)] = E[2tX(t) - Y] = 2tE[X(t)] - E[Y] = -1$.

A continuación calculamos la función de autocorrelación del proceso

$$R_Z(t, t+\tau) = E[Z(t) \cdot Z(t+\tau)] = E[(2tX(t) - Y) \cdot (2(t+\tau)X(t+\tau) - Y)] =$$
$$= E[4t(t+\tau) \cdot X(t) \cdot X(t+\tau)] - E[2YtX(t)] - E[2Y \cdot (t+\tau)X(t+\tau)] + E[Y^2] =$$
$$= 4t(t+\tau)E[X(t) \cdot X(t+\tau)] + E[Y^2] = 4t(t+\tau) \cdot R_X(\tau) + 5$$

Para terminar el cálculo hemos usado que $V(Y) = 4 = E[Y^2] - (E[Y])^2) \Leftrightarrow E[Y^2] = 4 + (E[Y])^2) = 5$ y que $E[X(t)] = 0$.

Podemos decir que el proceso $Z(t)$ no es estacionario en sentido amplio puesto que su función de autocorrelación $R_Z(t, t+\tau)$ depende de t.