ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
FECHA: 1 de Julio de 2021 **Duración:** 3 horas

SOLUCIONES

Ejercicio 1 *(1 punto) Los lanzadores A, B y C disponen de tres dardos cada uno y lanzan independientemente. Cada uno deja de lanzar cuando consigue hacer diana. La probabilidad de que cada tirador haga diana en cada lanzamiento es $\frac{1}{2}$ para el lanzador A, $\frac{1}{3}$ para el lanzador B y $\frac{2}{3}$ para el lanzador C.*

1. *Determina la probabilidad de que todos los lanzadores consigan hacer diana.*
2. *Determina la probabilidad de que solo un único lanzador haga diana.*

Solución. *Sea los sucesos:*

- $A \equiv$ *el lanzador A consigue hacer diana.*
- $B \equiv$ *el lanzador B consigue hacer diana.*
- $C \equiv$ *el lanzador C consigue hacer diana.*
- $A_i \equiv$ *el lanzador A consigue hacer diana en el lanzamiento i-ésimo, $i = 1,\ 2, 3$.*
- $B_j \equiv$ *el lanzador B consigue hacer diana en el lanzamiento j-ésimo, $j = 1,\ 2, 3$.*
- $C_k \equiv$ *el lanzador C consigue hacer diana en el lanzamiento k-ésimo, $k = 1,\ 2, 3$.*

Entonces, puesto que al hacer diana se deja de lanzar los sucesos $A_1,\ A_2$ y A_3 son incompatibles entre si, $P(A) = P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{8}$

Razonando análogamente, $P(B) = P(B_1 \cup B_2 \cup B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{27}$

Del mismo modo, $P(C) = P(C_1 \cup C_2 \cup C_3) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{26}{27}$

1. *Si todos los lanzadores hacen diana es el suceso $A \cap B \cap C$, y por ser sucesos independientes*

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{7}{8} \cdot \frac{19}{27} \cdot \frac{26}{27} = \frac{3458}{5832} = \frac{1729}{2916} \approxeq 0,5929$$

2. *Si solo un lanzador hace diana, y usando que los sucesos son independiente*

$$P((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)) = P((A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) \cdot P(\overline{C}) + P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(C) =$$

$$= \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{8} \cdot \frac{19}{27} \cdot \frac{1}{27} + \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{26}{27} = \frac{7}{729} + \frac{19}{5832} + \frac{26}{729} = \frac{283}{5832} \approxeq 0,0485$$

Ejercicio 2 *(1 punto) En un almacén de dispositivos electrónicos hay tres modelos de placas base, $M_1,\ M_2$ y M_3. Se sabe que hay el doble de placas base de M_1 que de M_2 y que hay las mismas placas base de los modelos M_2 y M_3. Sabemos también que resultan defectuosas el 10 %, 20 % y 5 %, de las placas base de los modelos $M_1,\ M_2$ y M_3, respectivamente.*

1. *Halla la probabilidad de que, al elegir aleatoriamente una placa base de este almacén, esta resulte defectuosa.*

2. *Halla la probabilidad de que una placa base que ha resultado ser defectuosa, sea del modelo M_1 o del modelo M_2.*

Solución.

Consideramos los sucesos

$M_i \equiv$ *se elige placa del modelo* M_i, *con* $i = 1, 2, 3$ $\qquad D \equiv$ *se elige una placa base defectuosa.*

Por los datos del enunciado, si $P(M_1) = p$, $P(M_2) = q$ *y* $P(M_3) = q$, *se verifica*

$$\left.\begin{array}{ll} p+q+q & = 1 \\ p & = 2q \end{array}\right\} \Longrightarrow 4q = 1 \Longrightarrow P(M_1) = \frac{1}{2},\ P(M_21) = \frac{1}{4} = P(M_3)$$

Además, $P(D/M_1) = 0,1$, $P(D/M_2) = 0,2$ *y* $P(D/M_3) = 0,05$,

1. *Aplicando el teorema de la probabilidad total, la probabilidad de elegir una placa base defectuosa es*

$$P(D) = P(M_1) \cdot P(D/M_1) + P(M_2) \cdot P(D/M_2) + P(M_3) \cdot P(D/M_3) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 0,1 + \frac{1}{4} \cdot 0,2 + \frac{1}{4} \cdot 0,05 = \frac{0,2+0,2+0,05}{4} = \frac{0,45}{4} = 0,1125$$

2. $P[(M_1 \cup M_2)/D] = P(M_1/D) + P(M_2)/D) - P[(M_1 \cap M_2)/D$, *pero el suceso* $M_1 \cap M_2$ *es imposible. Por tanto, utilizando el teorema de Bayes*

$$P[(M_1 \cup M_2)/D] = P(M_1/D) + P(M_2)/D) = \frac{P(M_1) \cdot P(D/M_1))}{P(D)} + \frac{P(M_2) \cdot P(D/M_2))}{P(D)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 0,1}{\frac{0,45}{4}} + \frac{\frac{1}{4} \cdot 0,2}{\frac{0,45}{4}} = \frac{\frac{0,4}{4}}{\frac{0,45}{4}} = \frac{0,4}{0,45} \backsimeq 0,8889$$

Ejercicio 3 *(2 puntos) El tiempo de espera en un servidor web ante una solicitud de un cliente sigue una variable aleatoria* T *con función de densidad*

$$f(t) = \begin{cases} \alpha t & \textit{si } 1 < t < 5, \\ 0 & \textit{en otro caso,} \end{cases}$$

donde α *es una constante.*

1. *Calcula el valor de la constante* α.

2. *Calcula la esperanza de* T.

3. *Calcula la probabilidad de que un cliente que accede al servidor espere más de 4 segundos.*

4. *En un determinado intervalo de tiempo, acceden 10 clientes al servidor web. Suponiendo que los tiempos de espera de cada acceso son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 2 clientes tengan que esperar más de 4 segundos?*

Solución.

1. *Para que f sea función de densidad, se debe cumplir que* $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. *Tenemos*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \alpha \int_{1}^{5} tdt = \alpha \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=1}^{t=5} = \frac{24\alpha}{2} = 12\alpha.$$

   Por lo tanto, necesariamente $\alpha = 1/12$.

2. *Por definición, tenemos*

$$E[T] = \int_{-\infty}^{\infty} tf(t)dt = \frac{1}{12}\int_{1}^{5} t^2dt = \frac{1}{12}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=1}^{t=5} = \frac{124}{36} = \frac{31}{9}.$$

3.

$$P(T > 4) = \int_{4}^{\infty} f(t)dt = \frac{1}{12}\int_{4}^{5} tdt = \frac{1}{12}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=4}^{t=5} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}.$$

4. *Sea X la variable aleatoria que cuenta el número de clientes que tienen que esperar más de 4 segundos la respuesta del servidor, entre los 20 clientes que han accedido. Entonces, X sigue una distribución binomial de parámetros $N = 10$, $p = P(T > 4) = 3/8$. Se pide calcular $P(X \geq 2)$:*

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{10}{0}p^0(1-p)^{10} - \binom{10}{1}p^1(1-p)^9 \\ &= 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} - 10 \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^9 \approx 0.936. \end{aligned}$$

Ejercicio 4 *(1 punto) Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional cuya función de probabilidad conjunta viene dada por la siguiente tabla:*

$Y \backslash X$	0	2	4
-1	$1/7$	$1/7$	0
1	0	$2/7$	$3/7$

1. *Calcula las funciones de probabilidad marginales de X e Y. ¿Son X e Y independientes? Justifica tu respuesta.*

2. *Calcula la covarianza entre X e Y.*

Solución.

1. *A partir de la tabla, tenemos*

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(X = 0, Y = -1) + P(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{7} + 0 = \frac{1}{7}, \\ P(X = 2) &= P(X = 2, Y = -1) + P(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}, \\ P(X = 4) &= P(X = 4, Y = -1) + P(X = 4, Y = 1) = 0 + \frac{3}{7} = \frac{3}{7}, \end{aligned}$$

   con lo cual la función de probabilidad marginal de X viene dada por los valores

$$P(X = 0) = \frac{1}{7}, \quad P(X = 2) = \frac{3}{7}, \quad P(X = 4) = \frac{3}{7}.$$

De manera similar,

$$P(Y=-1)=P(X=0,Y=-1)+P(X=2,Y=-1)+P(X=4,Y=-1)=\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+0=\frac{2}{7},$$
$$P(Y=1)=P(X=0,Y=1)+P(X=2,Y=1)+P(X=4,Y=1)=0+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7},$$

por lo tanto la función de probabilidad marginal de Y es la función dada por

$$P(Y=-1)=\frac{2}{7},\quad P(Y=1)=\frac{5}{7}.$$

Una vez obtenidas las funciones de probabilidad marginales, podemos comprobar fácilmente que X e Y no *son independientes ya que, por ejemplo,*

$$P(X=0,Y=1)=0 \quad \textit{pero} \quad P(X=0)P(Y=1)=\frac{1}{7}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5}{49}\neq 0.$$

2. *Para usar la fórmula $Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]$, calculemos primero $E[X]$, $E[Y]$ y $E[XY]$. Se tiene*

$$E[X]=0\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{3}{7}+4\cdot\frac{3}{7}=\frac{18}{7},$$
$$E[Y]=(-1)\cdot\frac{2}{7}+1\cdot\frac{5}{7}=\frac{3}{7},$$
$$E[XY]=(-2)\cdot\frac{1}{7}+2\cdot\frac{2}{7}+4\cdot\frac{3}{7}=2.$$

Por lo tanto,

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y]=2-\frac{18}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{44}{49}.$$

Ejercicio 5 *(1 punto) Sea* $f(x,\ y)=\begin{cases}\frac{1}{5}\ y\ (x+y^2) & \textit{si } 0<x<1;\quad 0<y<2\\ 0 & \textit{en el resto}\end{cases}$

la función de densidad conjunta de la variable aleatoria bidimensional $(X,\ Y)$.

1. *¿Cuánto vale la función de distribución conjunta en el punto* $\left(\frac{1}{2},1\right)$*?*

2. *Calcula $P(X+Y-1<1)$.*

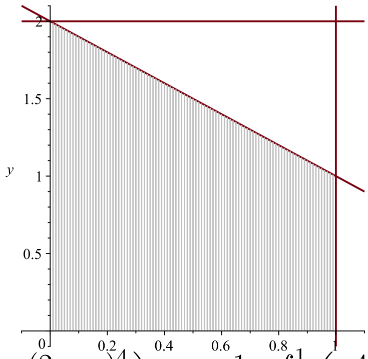
Solución.

1. *Sea $F(x,\ y)$ la función de distribución conjunta. Por tanto,*

$$F\left(\frac{1}{2},\ 1\right)=\int_0^{1/2}dx\int_0^1\frac{1}{5}\ y\ (x+y^2)\ dy=\frac{1}{5}\ \int_0^{1/2}x\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}\bigg|_0^1\ dx=\frac{1}{5}\ \int_0^{1/2}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\ dx=$$
$$=\frac{1}{5}\ \left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\bigg|_0^{1/2}\right)=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{5\cdot 16}=\frac{3}{80}=0,0375$$

2. *Nos piden la probabilidad que hay en la zona sombreada del siguiente dibujo, que es la región donde hay probabilidad no nula y $X+Y-1<1$*

$$P(X+Y-1<1)=\int_0^1dx\int_0^{2-x}\frac{1}{5}\ y\ (x+y^2)\ dy=\frac{1}{5}\ \int_0^1x\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}\bigg|_0^{2-x}\ dx=$$



$$= \frac{1}{5} \int_0^1 \left(x\frac{(2-x)^2}{2} + \frac{(2-x)^4}{4} \right) dx = \frac{1}{5} \int_0^1 \left(x\frac{4+x^2-4x}{2} + \frac{(2-x)^4}{4} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{5} \left(x^2 + \frac{x^4}{4\cdot 2} - 2\frac{x^3}{3} - \frac{(2-x)^5}{4\cdot 5} \Bigg|_0^1 \right) = \frac{1}{5} \left(1 + \frac{1}{4\cdot 2} - 2\frac{1}{3} - \frac{1}{20} + \frac{32}{20} \right) =$$

$$= \frac{1}{5}\ \frac{55+186}{120} = \frac{241}{600} \approxeq 0.4017$$

Ejercicio 6 *(2 puntos) El ruido, X, de la trasmisión de una señal a través del canal de comunicación sigue un modelo de distribución normal de media y varianzas desconocidas. Se analizó una muestra aleatoria simple de 10 señales, donde se midieron los niveles de ruido y se obtuvieron los siguientes resultados* $\sum_{i=1}^{10} x_i = 100$ *y* $\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = 36$.

1. *Halla un intervalo de confianza para la media, con un nivel de confianza del 90 %.*

2. *Halla un intervalo de confianza para la desviación típica, con un nivel de confianza del 95 %.*

3. *Se quiere contrastar la hipótesis nula $H_0 \equiv$ "La proporción de señales defectuosos es $p = 0,03$ (3 %)", frente a la alternativa $H_1 \equiv$ "$p \neq 0,03$", basándose en que de las 10 señales analizadas ninguna de ellas fue defectuosa. Calcula el p-valor del contraste. ¿Se acepta la hipótesis nula con un nivel de significación del 0,07 (7 %)?*

Solución.

Sea X la variable aleatoria "ruido en la transmisión de la señal", entonces $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, con ambos parámetros desconocidos.

1. *Para hallar un intervalo de confianza para la media utilizamos que el estadístico*

$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{S_1/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

donde $\overline{X}$ es el estadístico media muestral y S_1 la cuasidesviación típica muestral.

Por la simetría de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución t_{n-1} y llamando $t_{9,\ 0{,}95}$ a su cuantil de orden 0,95, será

$$P\left(-t_{9,\ 0,95} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{S_1/\sqrt{n}} \leq t_{9,\ 0,95} \right) = 0,9 \Longrightarrow P\left(\overline{X} - t_{9,\ 0,95}\frac{S_1}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{X} + t_{9,\ 0,95}\frac{S_1}{\sqrt{n}} \right) = 0,9$$

Un intervalo de confianza al 90 % para μ será

$$I.C._{0,9}(\mu) = \left(\overline{x} - t_{9,\ 0{,}95}\frac{s_1}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_{9,\ 0{,}95}\frac{s_1}{\sqrt{n}}\right)$$

En la muestra, $n = 10$, $\overline{x} = \frac{100}{10} = 10$ *y* $s_1 = \sqrt{\frac{36}{9}} = 2$.

En la tabla de la t de Student con 9 grados de libertad, $t_{9,\ 0{,}95} = 1,8331$

$$I.C._{0,9}(\mu) = \left(\mathit{10} - \mathit{1{,}8331}\ \frac{\mathit{2}}{\sqrt{10}}\ ,\ \mathit{10} + \mathit{1{,}8331}\ \frac{\mathit{2}}{\sqrt{10}}\right) = (\mathit{8{,}8406},\ \mathit{11{,}1594})$$

es el intervalo de confianza pedido.

2. *Para hallar un intervalo de confianza para la desviación típica utilizamos que el estadístico*

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$P\left(q_{0{,}025} \leq \frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \leq q_{0{,}975}\right) = 0,95 \Longrightarrow P\left(\frac{(n-1)S_1^2}{q_{0{,}975}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-1)S_1^2}{q_{0{,}025}}\right) = 0.95$$

siendo $q_{0{,}025}$ *y* $q_{0{,}975}$ *los cuantiles* $0,025$ *y* $0,975$ *de una distribución* χ^2_9*, respectivamente. En las tablas* $q_{0{,}025} = 2,7004$ *y* $q_{0{,}975} = 19,0228$.

El intervalo de confianza para σ^2 *es* $\left(\frac{9\cdot4}{19{,}0228}, \frac{9\cdot4}{2{,}7004}\right) = (1,8925, \quad 13,3314)$

$$I.C._{0,95}(\sigma) = \left(\sqrt{1,8925},\ \sqrt{13,3314}\right) = (1,3757, \quad 3,6512)$$

3. *Utilizamos el estadístico de contraste* $N \equiv$ *número de señales defectuosas entre 10. Supuesto que la hipótesis nula es cierta* N *tiene distribución binomial con parámetros* $n = 10$ *y* $p = 0,03$. *Entonces,*

$$P(N \leq 0) = P(N = 0) = 0,03^0 \cdot 0,97^{10} \approx 0,7374 \qquad y \qquad P(N \geq 0) = 1$$

Por tanto,

$$p\text{-}valor = 2P(N = 0) \approx 2 \cdot 0,7374 = 1,4748$$

Como el nivel de significación 0,07 es menor que el p-valor 1,4748 se acepta la hipótesis nula.

Ejercicio 7 *(1 punto) Sea* $\{X(t)\ /t \in \mathbb{R}\}$ *un proceso gaussiano, o normal, con media* $\mu_X(t) = 0$ *y función de autocorrelación* $R_X(t, t+\tau) = e^{-\tau^2}$. *Sea* A *una variable aleatoria, independiente de* $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$*, con* $P(A = 0) = 0,6$ *y* $P(A = 1) = 0,4$. *Sea* $Z(t) = A + X(t)$.

1. *Calcula la matriz de varianzas y covarianzas de* $[X(0), X(1), X(3)]$.
2. *Calcula la media y autocorrelación de* $Z(t)$.
3. *Halla* $P(Z(t) \leq 1)$.

Solución.

1. *Al ser el proceso $X(t)$ gaussiano la distribución conjunta de las variables aleatorias* $\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(3) \end{pmatrix}$ *es normal tridimensional.*

   Como $E[X(t)] = \mu_X(t) = \mu_X$, *por ser el proceso estacionario, la media es constante e igual a cero ya que* $\mu_X = 0$, *así el vector de medias de* $\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(3) \end{pmatrix}$ *es* $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   $V[X(t)] = R_X(0) - \mu_X^2 = e^{-0^2} - 0^2 = 1$ *y* $Cov[X(0),\ X(1)]] = R_X(|1-0|) - \mu_X^2 = e^{-1^2} = \dfrac{1}{e}$.

   $Cov[X(0),\ X(3)]] = R_X(|3-0|) - \mu_X^2 = e^{-3^2} = \dfrac{1}{e^9}$. *Análogamente,* $Cov[X(1),\ X(3)]] = \dfrac{1}{e^4}$

   Así que la matriz de varianzas y covarianzas de $\begin{pmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(3) \end{pmatrix}$ *es* $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{e} & \frac{1}{e^9} \\ \frac{1}{e} & 1 & \frac{1}{e^4} \\ \frac{1}{e^9} & \frac{1}{e^4} & 1 \end{pmatrix}$.

2. $\mu_X(t) = E[X(t)] = 0$ *y* $E[A] = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,4 = 0,4$. *Por tanto,*

   $$\mu_Z(t) = E[Z(t)] = E[A] + E[X(t)] = 0,4 + 0 = 0,4$$

   Aplicando la linealidad de la media, la independencia entre las diferentes v.a. y el valor de las medias

   $$R_Z(t, t+\tau) = E[Z(t)Z(t+\tau)] = E[(A + X(t))(A + X(t+\tau))] =$$

   $$= E[A^2 + A \cdot X(t+\tau) + X(t) \cdot A + X(t) \cdot X(t+\tau) = E[A^2] + E[A] \cdot E[X(t+\tau)] + E[X(t)] \cdot E[A] + E[X(t) \cdot X(t+\tau)] =$$

   $$= 0^2 \cdot 0,6 + 1^2 \cdot 0,4 + 0 + 0 + e^{-\tau^2} = 0,4 + e^{-\tau^2}$$

3. *Sea Φ la función de distribución de la normal estándar. Aplicando el teorema de la probabilidad total*

   $P(Z(t) \leq 1) = P(A + X(t) \leq 1) = P(A = 0) \cdot P(Z(t) \leq 1/A = 0) + P(A = 1) \cdot P(Z(t) \leq 1/A = 1) =$

   $= 0,6 \cdot P(X(t) \leq 1) + 0,4 \cdot P(X(t) \leq 0) = 0,6 \cdot \Phi(1) + 0,4 \cdot \Phi(0) = 0,6 \cdot 0,84134 + 0,4 \cdot 0,5 = 0,7048$

Ejercicio 8 *(1 punto)*

1. *Sea $N(t)$ el número de peticiones que llegan a un servidor en el intervalo $[0, t)$ un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 2$. Calcula* $P[N(1) = 1,\ N(2) = 3,\ N(5) = 6)]$.

2. *Sea θ una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0, 2\pi]$. Sea el proceso estocástico $X(t) = \cos(3t + \theta)$ ¿Es estacionario en sentido amplio?.*
   Indicación*:* $\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \dfrac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$

Solución.

1. *$N(1)$ es el número de clientes que llegan en $[0, 1)$, $N(2)$ es el número de clientes que llegan en $[0, 2)$ y $N(5)$ es el número de clientes que llegan en $[0, 5)$. Entonces, las variables aleatorias $N(1)$, $N(2) - N(1)$ -número de ocurrencias en $[1, 2)$- y $N(5) - N(2)$ -número de ocurrencias en $[2, 5)$-, son independientes por contar sucesos de interés en intervalos de tiempo disjuntos.*

Además, $N(1)$, $N(2)-N(1)$ *y* $N(5)-N(2)$ *son v.a. de Poisson con parámetro* $2\cdot 1$, $2\cdot(2-1)$ *y* $2\cdot(5-2)$, *respectivamente. Entonces,*

$$\begin{aligned} P[N(1)=1,\ N(2)=3,\ N(5)=6] =& P[N(1)=1,\ N(2)-N(1)=3-1,\ N(5)-N(2)=6-3)] = \\ &= P(N(1)=1)\cdot P(N(2)-N(1)=2)\cdot P(N(5)-N(2)=3) = \\ &= e^{-2}\frac{2^1}{1!}\cdot e^{-2}\frac{2^2}{2!}\cdot e^{-6}\frac{6^3}{3!} = e^{-10}\cdot 144 \approx 0,0065 \end{aligned}$$

2. *Si* $\mu_X(t)$ *es la media del proceso, entonces*

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_0^{2\pi} \cos(3t+\theta)\,\frac{1}{2\pi}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\cdot \operatorname{sen}(3t+\theta)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\cdot\operatorname{sen}(3t+2\pi) - \frac{1}{2\pi}\cdot\operatorname{sen}(3t) = 0$$

Por lo que es constante.

Sea $R_X(t,t+\tau)$ *la función de autocorrelación del proceso.*

$$R_X(t,t+\tau) = E[X(t)\cdot X(t+\tau)] = E[\cos(3t+\theta)\cdot\cos(3(t+\tau)+\theta)]$$

Utilizando la indicción se tiene que

$$R_X(t,t+\tau) = \frac{1}{2}\cdot E[\cos(6t+3\tau+2\theta)+\cos(3\tau)] = \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos(6t+3\tau+2\theta)\,\frac{1}{2\pi}\,d\theta + \frac{1}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\cos(3\tau)\,\frac{1}{2\pi}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\operatorname{sen}(6t+3\tau+2\theta)}{2}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{4\pi}\cdot\cos(3\tau)\cdot\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{\operatorname{sen}(6t+3\tau+4\pi)}{8\pi} - \frac{\operatorname{sen}(6t+3\tau)}{8\pi} + \frac{\cos(3\tau)}{4\pi}\cdot 2\pi = \frac{\cos(3\tau)}{2}$$

Puesto que la media es constante y la función de autocorrelación solo depende de la separación de las v.a. consideradas el proceso $\{X(t)=\cos(3t+\theta)\}_{t\in\mathbb{R}}$ *es estacionario en sentido amplio.*