Departamento de Matemática Aplicada a la I.T.T.

ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

EXAMEN FINAL **Duración:** 3 horas

CONVOCATORIA: PRIMAVERA 2011

FECHA: 7 de Junio de 2011

PUBLICACIÓN NOTAS: 14 de Junio de 2011 **REVISIÓN:** 17 de Junio de 2011

APELLIDOS Y NOMBRE:

DNI: **TITULACIÓN:**

---

1. Se realiza un test a 100 componentes, para detectar las componentes defectuosas. La probabilidad de que una componente sea defectuosa es de 0'02. El test tiene una probabilidad de 0'9 de dar positivo cuando se aplica a una componente defectuosa y una probabilidad de 0'01 de dar positivo cuando se aplica a una componente no defectuosa. Se supone independencia entre las distintas componentes.

   (a) *(0.5 puntos)* Calcula la probabilidad de que el test de positivo cuando se aplica a una componente.

   Solución: Denominando $T_+ \equiv$ *el test da positivo*, y $D \equiv$ *la componente es defectuosa*, se tiene

   $$P(T_+) = P(D)P(T_+/D) + P(\overline{D})P(T_+/\overline{D}) = 0{,}02 \times 0{,}9 + 0{,}98 \times 0{,}01 = 0{,}0278$$

   (b) *(0.5 puntos)* Calcula la probabilidad de que una componente para la cual el test ha dado negativo, sea defectuosa.

   Solución: Denominando $T_- \equiv$ *el test da negativo*, se tiene

   $$P(D/T_-) = \frac{P(D \bigcap T_-)}{P(T_-)} = \frac{P(D)P(T_-/D)}{1 - P(T_+)} = \frac{0{,}02 \times 0{,}1}{0{,}9722} = 0{,}9742$$

   (c) *(0.5 puntos)* Calcula la función de probabilidad de X, número de componentes para las cuales el test da negativo.

   Solución: X tiene distribución binomial de parámetros $n = 100$ y $p = P(T_-) = 0{,}9722$. Entonces

   $$P(X = x) = \binom{100}{x} 0{,}9722^x (1 - 0{,}9722)^{100-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, 100.$$

   (d) *(0.5 puntos)* Calcula la función de probabilidad de Y, número de componentes defectuosas para las cuales el test da negativo.

   Solución: Y tiene distribución binomial de parámetros $n = 100$ y $p = P(D \bigcap T_-) = 0{,}002$. Entonces

   $$P(Y = y) = \binom{100}{y} 0{,}002^y (1 - 0{,}002)^{100-y}, \quad y = 0, 1, \ldots, 100.$$

2. Se emite 1 o -1 siendo la probabilidad de emitir 1 la misma que la de emitir -1. En el extremo receptor aparece una tensión $V = -1 + R$ si se emite -1 y una tensión $V = 1 + R$ si se emite 1, siendo R un ruido, variable aleatoria que tiene distribución $N(0, 1)$. Se establece que se emitió -1 si $V \leq 0$ y 1 en caso contrario.

   a) *(0.5 puntos)* Calcula la probabilidad de error en la transmisión de un bit.

   Solución: Denominando por E_1 y por E_{-1} a los sucesos emitir 1 y emitir -1 respectivamente, se tiene

$$P(\text{Error}) = P(E_1)P(\text{Error}/E_1) + P(E_{-1})P(\text{Error}/E_{-1}) = \frac{1}{2}\left[P(R < -1) + P(R > 1)\right]$$
$$= P(R > 1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0{,}84134 = 0{,}15866$$

   b) *(1 punto)* Supuesto $V \in (0{,}9\,,\,1)$ calcula la probabilidad de que se emitiera un 1.

   Solución:

$$P[E_1/V \in (0{,}9\,,\,1)] = \frac{P[E_1 \bigcap V \in (0{,}9\,,\,1)]}{P[V \in (0{,}9\,,\,1)]}$$
$$= \frac{P[E_1]P[P(V \in (0{,}9\,,\,1))/E_1]}{P[E_1]P[P(V \in (0{,}9\,,\,1))/E_1] + P[E_{-1}]P[P(V \in (0{,}9\,,\,1))/E_{-1}]}$$
$$= \frac{P(-0{,}1 < R < 0)}{P(-0{,}1 < R < 0) + P(1{,}9 < R < 2)} = \frac{\Phi(0{,}1) - \Phi(0)}{\Phi(0{,}1) - \Phi(0) + \Phi(2) - \Phi(1{,}9)} \approx 0{,}98394$$

3. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

   Calcula

   a) *(0.3 puntos)* El primer cuartil de X

   Solución: El primer cuartil $C_{1/4}$ verifica $F_X(C_{1/4}) = 1/4$, y entonces $C_{1/4}^2 = 1/4$. Por tanto $C_{1/4} = 1/2$.

   b) *(0.4 puntos)* La media de la variable aleatoria $Y = X^2$

   Solución: Se tiene que $f_X(x) = 2x$, $0 < x < 1$. Entonces

$$E[Y] = E[X^2] = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}[x^4]_0^1 = \frac{1}{2}$$

   c) *(0.3 puntos)* La varianza de la variable aleatoria $Y = X^2$

   Solución: Se tiene

$$E[Y^2] = E[X^4] = \int_0^1 2x^5 dx = \frac{2}{6}[x^6]_0^1 = \frac{1}{3}$$

   y entonces

$$VAR[X^2] = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

4. *(1 punto)* Se toma una muestra de tamaño 100 de una población normal, de media μ y varianza conocida $\sigma^2 = 100$. ¿Qué distribución tiene la media muestral $\overline{X}$? ¿Qué longitud tiene el intervalo de confianza al 90 % para μ que se puede calcular con esta muestra?

   Solución: La media muestral $\overline{X}$ tiene distribución normal con media μ y desviación típica $\sqrt{100}/\sqrt{100} = 1$. Como el cuantil $C_{0,95}$ de una normal estándar es 1,64, se tiene

$$P\Big(-1{,}64 < \bar{X} - \mu < 1{,}64 \Big) = 0{,}9$$

   y entonces

$$P\Big(\bar{X} - 1{,}64 < \mu < \bar{X} + 1{,}64 \Big) = 0{,}9$$

   El intervalo de confianza al 90 % para μ, tiene pues longitud $2 \times 1{,}64 = 3{,}28$.

5. Un experimento consiste en lanzar una moneda dos veces. En ella la probabilidad de obtener cara es 1/3 y la de obtener cruz 2/3.

   Sea X la variable aleatoria que mide el número de caras obtenido en el experimento e Y la variable aleatoria que mide el número de cruces obtenido.

   a) *(0.5 puntos)* ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento? Determina la probabilidad de cada suceso elemental.

   Solución:

   $\Omega = \{cc, c+, +c, ++\}$
   $P(\{cc\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}, \quad P(\{c+\}) = P(\{+c\}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}, \quad P(\{++\}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

   b) *(0.5 puntos)* Calcula $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

   Solución:

   La función de probabilidad conjunta de la variable aleatoria (X, Y) es

Y \X	0	1	2
0	0	0	$\frac{1}{9}$
1	0	$\frac{4}{9}$	0
2	$\frac{4}{9}$	0	0

   $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
   $E(XY) = 0 \cdot 2 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$
   $E(X) = 0 \cdot \frac{4}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$
   $E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3}$
   $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\frac{4}{9}$

6. Sea $(X,\ Y)$ una variable aleatoria bidimensional con función de densidad conjunta

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \frac{12}{5}xy(1+y) & \text{si } 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcula:

   a) *(0.5 puntos)* La distribuciones marginales de X.

   Solución:

$$f_X(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{12}{5}xy(1+y)\,dy = \frac{12}{5}x\left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^1\right) = 2x \ \ \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 \qquad \text{en el resto} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{12}{5}xy(1+y)\,dx = \frac{12}{5}y(1+y)\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{6}{5}y(y+1) \ \ \text{si } 0 < y < 1 \\ 0 \qquad \text{en el resto} \end{cases}$$

   b) *(1 punto)* $P(X < Y)$

   Solución:

$$P(X < Y) = \int_0^1 \left(\int_x^1 \frac{12}{5}xy(1+y)\,dy\right)\,dx \int_0^1 \frac{12}{5}x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\,dx = \frac{27}{50}$$

7. *(1 punto)* Sea (X, Y, Z) una variable aleatoria que sigue una distribución normal multidimensional, con vector de medias $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y matriz de covarianzas $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Calcula la distribución de $(X - Y + 3Z,\ 2Y + 4,\ Z - 3)$.

Solución:

$$\begin{pmatrix} X - Y + 3Z \\ 2Y + 4 \\ Z - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Así pues

$(X - Y + 3Z,\ 2Y + 4,\ Z - 3)$ sigue una distribución Normal multidimensional con vector de medias

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y matriz de covarianzas

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & -4 & 4 \\ -4 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. *(1 punto)* Sea el proceso aleatorio $X(t) = e^{-\mu t}, \quad t > 0$, donde μ es una variable aleatoria continua, con distribución uniforme en $(0, 2)$.

Halla $E(X(t)),\ R_X(t, t+\tau),\ Var(X(t))$. ¿Es este proceso estacionario en sentido amplio?

Solución:

$$E[X(t)] = E\left[e^{-\mu t}\right] = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-\mu t}\, d\mu = \frac{1 - e^{-2t}}{2t}$$

La media del proceso no es constante por lo que ya no puede ser estacionario en sentido amplio.

$$\begin{aligned} R_X(t, t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E\left[e^{-\mu t} e^{-\mu(t+\tau)}\right] \\ &= E\left[e^{-\mu(2t+\tau)}\right] = \int_0^2 \frac{1}{2} e^{-\mu(2t+\tau)}\, d\mu = \frac{1 - e^{-4t-2\tau}}{4t + 2\tau} \end{aligned}$$

$$\mathrm{VAR}[X(t)] = C_X(t,t) = R_X(t,t) - [E(X(t))]^2 = \frac{1 - e^{-4t}}{4t} - \left(\frac{1 - e^{-2t}}{2t}\right)^2$$