*Departamento de Matemática Aplicada a la I.T.T.*

**ASIGNATURA:** ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS

**EXAMEN FINAL (Primavera 2012)** **Duración:** 3 horas

**FECHA:** 4 de Junio de 2012

**Fecha publicación notas:** 11 de Junio de 2012 **Fecha revisión examen:** 14 de Junio de 2012

**APELLIDOS Y NOMBRE:**

**DNI:** **TITULACIÓN:**

---

**En cada pregunta poner en la casilla correspondiente la respuesta, justificándola, en el hueco correspondiente, con los cálculos y explicaciones apropiadas.**

**SOLUCIÓN**

---

**Ejercicio 1** *(1.5 puntos) Se sabe que una determinada alergia a las gramíneas afecta a un 10 % de la población de una ciudad. Se realiza un test para detectar si una persona tiene alergia a las gramíneas. La probabilidad de que dé positivo si se es alérgico es 0,6 y la probabilidad de que que el test dé positivo si no se es alérgico es 0,01.*

1. *Calcula la probabilidad de que una persona sea alérgica si el test ha dado positivo.*

   $P(\text{Alérgico/Test positivo}) = \dfrac{0,1 \cdot 0,6}{0,1 \cdot 0,6 + 0,9 \cdot 0,01} \approx 0{,}87$

2. *Calcula la probabilidad de que una persona no sea alérgica si test ha dado negativo.*

   $P(\text{No alérgico/Test negativo}) = \dfrac{0,9 \cdot 0,99}{0,4 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,99} \approx 0,96$

**Ejercicio 2** *(1 punto) Sea $X$ el número de pruebas necesario para que aparezca por primera vez "un 5 o un 6" en lanzamientos sucesivos de un dado, en el que la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los valores mayores que 2 es el doble que la de cada uno de los valores menores que 3.*

1. *Calcula la función de probabilidad de $X$.*

   $X$ sigue una distribución geométrica de parámetro $p = P(\text{de obtener un 5 o un 6 al lanzar el dado})$.

   El dado está cargado de modo que $P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = p_1$, $P(1) = P(2) = p_2$ y $p_1 = 2p_2$

   Como $\sum_{i=1}^{6} P(i) = 1$, se verifica que $p_2 = 1/10$, $\quad p_1 = 1/5$

   Por tanto $p = P(5) + P(6) = 2/5$

$$P(X = i) = (1-p)^{i-1}p = \left(\frac{3}{5}\right)^{i-1} \frac{2}{5}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

*2. Calcula $P(X > 9\ /X > 2)$*

$$P(X > i) = \sum_{k=i+1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^i}{1-\frac{3}{5}} = \left(\frac{3}{5}\right)^i$$

Entonces,

$$P(X > 9\ /X > 2) = \frac{P(X > 9)}{P(X > 2)} = \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^9}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^7$$

**Ejercicio 3** *(1 punto) La variable aleatoria continua $X$ tiene una función de distribución dada por*

$$F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ \frac{1}{25}x^2 & si \quad 0 \le x \le 5 \\ 1 & si \quad x > 5 \end{cases}$$

*1. Calcula $P(1 \le X \le 2)$*

$$P(1 \le X \le 2) = F(2) - F(1) = \frac{4}{25} - \frac{1}{25} = \frac{3}{25}$$

*2. Calcula $P(X^2 < 4)$*

$$P(X^2 < 4) = P(-2 < X < 2) = F(2) - F(-2) = \frac{4}{25} - 0 = \frac{4}{25}$$

*3. Calcula la media de $X$.*

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{2x}{25} & 0 < x < 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_0^5 x\frac{2x}{25}\, dx = \frac{2}{25}\frac{x^3}{3}\Big|_0^5 = 10/3$$

**Ejercicio 4** *(1 punto) En una población normal con desviación típica 5 se quiere contrastar la hipótesis nula $H_0 : \mu = 105$ frente a la alternativa $H_1 : \mu \neq 105$ utilizando una muestra de tamaño 9. El valor de la media muestral es $\overline{x} = 100$. Calcula el p-valor del contraste. ¿Se aceptaría la hipótesis nula con un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$?*

Sabemos que $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

Si $H_0$ es cierta, $Y = \dfrac{\overline{X} - 105}{5/\sqrt{9}} \sim N(0,1)$

El valor de $Y$ en la muestra es $y = \dfrac{100 - 105}{5/\sqrt{9}} = -3$.

El p-valor del contraste es $2\ P(Z < -3) = 2(1 - F_Z(3)) \approx 2(1 - 0,99865) = 0,0027$

Se acepta que la media de $X$ es 105 para todo nivel de significación menor que 0,0027. En este caso se rechaza.

**Ejercicio 5** *(1 punto) La media del peso de los pasajeros de un avión es 75 kg y su desviación típica es 7.5 kg.*

*Calcula, utilizando el teorema central del límite, la probabilidad de que la suma del peso de 45 pasajeros supere los 3300 kg.*

Según el Teorema Central del límite, la variable aleatoria $S = \sum_{n=1}^{45} X_n$ tiene aproximadamente distribución $N(3375, 7,5\sqrt{45})$, donde $X_n \equiv$ representa el peso del pasajero $n$, para $n = 1, \ldots, 45$. Por tanto, la probabilidad pedida es

$$P(S > 3300) \approx P\left(Z > \frac{3300 - 3375}{7,5\sqrt{45}}\right) = P(Z > -1,49) \approx 0,931$$

donde $Z$ tiene distribución normal estándar.

**Ejercicio 6** *(2 puntos) Sean $X$ e $Y$ dos v.a. independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Calcula*

1. $E[Ye^X]$

$$E[Ye^X] = \frac{1}{2}E[e^X] = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x dx = \frac{e-1}{2}$$

2. $P(X > 0'8, Y > 0'5)$

$$P(X > 0'8, Y > 0'5) = P(X > 0'8)P(Y > 0'5) = 0'2 \cdot 0'5 = 0'1$$

3. $P(X^2 < Y)$

$$P(X^2 < Y) = \int_0^1 \int_{x^2}^1 dy dx = \int_0^1 1 - x^2 dx = [x - x^3/3]_0^1 = 2/3$$

**Ejercicio 7** *(1.5 puntos) Sea $X(t)$ un proceso estocástico normal y estacionario de media $E[X(t)] = 0$ y autocorrelación*

$$R_X(\tau) = \begin{cases} \dfrac{4}{4 + |\tau|^2} & |\tau| < 5 \\ 0 & |\tau| \geq 5 \end{cases}$$

1. *Calcula la matriz de covarianzas de la variable aleatoria bidimensional $[X(1), X(2)]$*

$$\mathrm{VAR}[X(t)] = E[X^2(t)] - E[X(t)]^2 = R_X(0) = 1\,, \quad t \in \mathbb{R},$$
$$\mathrm{COV}[X(1), X(2)] = E[X(1)X(2)] - E[X(1)]E[X(2)] = R_X(1) = \frac{4}{5}$$

Así pues, la matriz de covarianzas de $[X(1), X(2)]$ es,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{VAR}[X(1)] & \mathrm{COV}[X(1), X(2)] \\ \mathrm{COV}[X(2), X(1)] & \mathrm{VAR}[X(2)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 \\ 4/5 & 1 \end{pmatrix}$$

*2. Calcula la matriz de covarianzas de la variable aleatoria bidimensional* $[X(0), X(3)+5X(4)]$

$$\begin{aligned}
\text{VAR}[X(t)] &= E[X^2(t)] - E[X(t)]^2 = R_X(0) = 1\,, \quad t \in \mathbb{R},\\
\text{COV}[X(0), X(3)] &= E[X(0)X(3)] - E[X(0)]E[X(3)] = R_X(3) = \frac{4}{13},\\
\text{COV}[X(0), X(4)] &= E[X(0)X(4)] - E[X(0)]E[X(4)] = R_X(4) = \frac{1}{5},\\
\text{COV}[X(3), X(4)] &= E[X(3)X(4)] - E[X(3)]E[X(4)] = R_X(1) = \frac{4}{5},
\end{aligned}$$

La matriz de covarianzas de $[X(0), X(3), X(4)]$ es

$$\begin{pmatrix} \text{VAR}[X(0)] & \text{COV}[X(0), X(3)] & \text{COV}[X(0), X(4)] \\ \text{COV}[X(3), X(0)] & \text{VAR}[X(3)] & \text{COV}[X(3), X(4)] \\ \text{COV}[X(4), X(0)] & \text{COV}[X(4), X(3)] & \text{VAR}[X(4)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{13} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{13} & 1 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{pmatrix} X(0) \\ X(3)+5X(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(0) \\ X(3) \\ X(4) \end{pmatrix}$$

La matriz de covarianzas de $[X(0), X(3)+5X(4)]$ será

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{13} & \frac{1}{5} \\ \frac{4}{13} & 1 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{17}{13} \\ \frac{17}{13} & 34 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 8** *(1 punto) Supongamos que* $N(t)$ *es un proceso de Poisson de tasa 2.*

*Calcula* $P(N(3) = 6, N(5) \geq 7)$.

Para cada valor de $t$, $N(t) \sim Pois(2t)$ y como los intervalos $[0,3)$ y $[3,5)$ son disjuntos y además $N(5) - N(3)$ tiene igual distribución que $N(2)$, se verifica que, $N(3)$ y $N(5) - N(3)$ son v.a independientes y ambas tienen distribución Poisson de medias 6 y 4, respectivamente.

Por tanto,

$$\begin{aligned}
P(N(3) = 6, N(5) \geq 7) =& P(N(3) = 6, N(5) - N(3) \geq 1) = P(N(3) = 6) \cdot P(N(5) - N(3) \geq 1)\\
=& P(N(3) = 6)(1 - P(N(5) - N(3) = 0)) = e^{-6}\frac{6^6}{6!}(1 - e^{-4}) \approx 0{,}15768
\end{aligned}$$