Departamento de Matemática Aplicada a la I.T.T.

ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
EXAMEN FINAL (Primavera 2013) **Duración:** 2 horas 30'
Fecha: 3 de Junio de 2013
Fecha publicación notas: 12-06- 2013 **Fecha revisión examen:** 17-06-2013
APELLIDOS Y NOMBRE:
DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *(1 punto)*

Hay n calcetines en un cajón, de los que 3 son rojos. Supongamos que, si se eligen dos calcetines aleatoriamente, la probabilidad de que ambos sean rojos es 1/2. Encuentra el valor de n.

Solución. Como todos los pares tienen igual probabilidad de ser elegidos, aplicando la regla de Laplace se obtiene

$$\frac{1}{2} = P(\text{elegir dos rojos}) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{n}{2}} = \frac{3}{\frac{n!}{2(n-2)!}} = \frac{6}{n^2 - n}$$

Entonces $n^2 - n - 12 = 0$, de donde se deduce que $n = 4$.

Ejercicio 2 *(1.5 puntos)*

Se sabe que un 0.1 % de las personas que entran al metro tienen un billete caducado. Además, hay una probabilidad igual a 0.01 de que un billete de metro no caducado dé como no válido al pasar por el torno. Un determinado día pasan 1000 personas por cierta estación (cada uno con su billete).

(a) *Calcula la función de probabilidad de la variable aleatoria X: Número de billetes que el torno da como no válidos.*

Solución. X tiene distribución $\text{Bin}(n = 1000, p)$ donde p es la probabilidad de que un billete de como no válido al pasar por el torno. Calculamos a continuación el parámetro p.

Denotamos

$$V \equiv \text{El billete es considerado válido}, \quad C \equiv \text{El billete está caducado}$$

Sabemos que $P(C) = 0.001$ y que $P(\overline{V}/\overline{C}) = 0.01$. Utilizando el teorema de la probabilidad total se obtiene

$$p = P(\overline{V}) = P(\overline{V}/C)P(C) + P(\overline{V}/\overline{C})P(\overline{C}) = 1 \cdot 0.001 + 0.01 \cdot 0.999 = 0.01099$$

Por tanto $\quad P(X = i) = \binom{1000}{i} 0.01099^i \cdot 0.98901^{1000-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, 1000$

(b) *Calcula el número medio de personas que "tienen un billete no caducado y no pasan el torno".*

Solución. Sea Y la variable aleatoria que mide "cuántas personas, de las 10000, tienen un billete no caducado y el torno lo considera no válido". Esta distribución tiene distribución binomial $\text{Bin}(n = 1000, p_1)$ siendo

$$p_1 = P(\overline{C} \cap \overline{V}) = P(\overline{V}/\overline{C})P(\overline{C}) = 0.01 \cdot 0.999 = 0.00999$$

Entonces

$$E(Y) = np_1 = 1000 \cdot 0.00999 = 9.99$$

Ejercicio 3 *(1.5 puntos)*

Se ha comprobado que el tiempo de vida, X, de ciertos elementos sigue una distribución exponencial con media 8 meses.

(a) *Calcula la probabilidad de que un elemento tenga una vida entre 3 y 12 meses.*

Solución.

$$f_X(x) = \frac{1}{8}e^{-x/8}, \quad \text{si} \;\; x > 0$$

$$P(3 < X < 12) = \int_3^{12} \frac{1}{8}e^{-x/8}\,dx = -e^{-x/8}\Big|_3^{12} \simeq 0.4641$$

(b) *Calcula el cuantil de orden* 0.95 *de X.*

Solución.

$$0.95 = P(X \leq q_{0.95}) = \int_0^{q_{0.95}} \frac{1}{8}e^{-x/8}\,dx = -e^{-x/8}\Big|_0^{q_{0.95}} = 1 - e^{-q_{0.95}/8}$$

$$0.05 = e^{-q_{0.95}/8} \Rightarrow \ln(0.05) = -\frac{q_{0.95}}{8} \Rightarrow q_{0.95} = -8\ln(0.05) \simeq 23.96$$

(c) *Calcula la probabilidad de que un elemento que ha vivido ya más de 10 meses viva más de 25.*

Solución.

$$P(X > 25/X > 10) = \frac{P(X > 25)}{P(X > 10)} = \frac{\displaystyle\int_{25}^{+\infty} \frac{1}{8}e^{-x/8}\,dx}{\displaystyle\int_{10}^{+\infty} \frac{1}{8}e^{-x/8}\,dx} = \frac{-e^{-x/8}\Big|_{25}^{+\infty}}{-e^{-x/8}\Big|_{10}^{+\infty}} = \frac{e^{-25/8}}{e^{-10/8}} = e^{-15/8}$$

Ejercicio 4 *(1 puntos) La producción diaria (en cientos de unidades) de una fábrica de monturas para gafas sigue una distribución normal. El valor de la cuasivarianza en una muestra tomada a lo largo de 16 días es $s_1^2 = 4.33$. Calcula un intervalo de confianza al 95 % para la desviación típica de la producción diaria.*

Nota: *Sea X una variable aleatoria con distribución chi cuadrado con 15 grados de libertad. La siguiente tabla muestra los valores de su función de distribución en diferentes abscisas*

x	*6.26*	*7.26*	*10.30*	*24.99*	*27.48*
$P(X \leq x)$	*0.025*	*0.05*	*0.2*	*0.95*	*0.975*

Solución. Sabemos que

$$\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Entonces

$$P\left(q_{0.025} \leq \frac{15S_1^2}{\sigma^2} \leq q_{0.975}\right) = 0.95$$

$$P\left(\frac{15S_1^2}{q_{0.975}} \leq \sigma^2 \leq \frac{15S_1^2}{q_{0.025}}\right) = 0.95$$

Un intervalo de confianza al 95 % para σ^2 es

$$\left(\frac{15 \cdot 4.33}{27.48}, \frac{15 \cdot 4.33}{6.26}\right) = (2.36, 10.37)$$

Por tanto, un intervalo de confianza al 95 % para σ es

$$(\sqrt{2.36}, \sqrt{10.37}) = (1.53, 3.22)$$

Ejercicio 5 *(1.5 puntos) Sean X y Y dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme en* $(0,1)$.

(a) *Calcula* $P(X \leq a)$*, siendo* $0 \leq a \leq 1$.

Solución.

$$P(X \leq a) = \int_0^a dx = a$$

(b) *Calcula* $P(\text{máx}\{X,Y\} < a)$*, siendo* $0 \leq a \leq 1$.

Solución.

$$P(max\{X,Y\} \leq a) \overset{v.a.i}{=} P(X \leq a) \cdot P(Y \leq a) = a^2$$

(c) *Calcula* $P(X + Y \leq \frac{1}{2})$.

Solución.

$$\begin{aligned} P(X+Y \leq \frac{1}{2}) &= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\frac{1}{2}-x} dy \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - x\right) dx = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

(d) *Calcula* $E(XY)$ *y* $\text{VAR}(2X+Y)$.

Solución.

$$\begin{aligned} E[X \cdot Y] &\overset{v.a.i}{=} E[X] \cdot E[Y] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\ \text{VAR}(2X+Y) &\overset{v.a.i}{=} 4\,\text{VAR}(X) + \text{VAR}(Y) \overset{Tablas}{=} 4 \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Ejercicio 6 *(1 punto)*

Supongamos que $X_1, X_2, \ldots, X_{30}$ *son variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, con media* $E(X_i) = \frac{5}{2}$ *y varianza* $\text{VAR}(X_i) = \frac{5}{4}$, $i = 1, 2, \ldots, 30$.

Sea

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_{30}}{30}$$

(a) *Calcula* $E[\overline{X}]$ *y* $\text{VAR}(\overline{X})$.

Solución.

$$\begin{aligned} E[\overline{X}] =& \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} E[X_i] = \frac{1}{30} \cdot 30 \cdot E[X_i] = \frac{5}{2} \\ \text{VAR}(\overline{X}) \overset{v.a.i}{=}& \frac{1}{30^2} \sum_{i=1}^{30} \text{VAR}(X_i) = \frac{1}{30^2} \cdot 30 \cdot \text{VAR}(x_i) = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

(b) *Utiliza el teorema central del límite para obtener una valor aproximado de* $P(\overline{X} > 3)$.

Solución.

$$\overline{X} \rightsquigarrow N\left(\frac{5}{2}, \sigma^2 = \frac{1}{24}\right)$$

$$P(\overline{X} > 3) = P\left(Z > \frac{3 - \frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{1}{24}}}\right) = 1 - P(Z < 2.45) \overset{Tablas}{\simeq} 0.00714$$

Ejercicio 7 *(1.5 puntos)*

El número de llegadas a un sistema $N(t)$ es un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 2$ llegadas/segundo.

a) *Calcula la probabilidad de que no haya ninguna llegada entre los segundos 5 y 7, es decir en el intervalo de tiempo $[5, 7]$.*

   Solución.

   Las llegadas en el intervalo $[5, 7]$, $N(7) - N(5)$, tiene distribución de Poisson de media $\lambda \times 2 = 4$ (la misma que $N(2)$). Entonces

$$P(N(7) - N(5) = 0) = e^{-4}$$

b) *Calcula $P(N(1) = 3, N(4) = 8)$*

   Solución. Teniendo en cuenta que las llegadas en el intervalo $(0, 1)$, $N(1)$, y en el intervalo $(1, 4)$, $N(4)-N(1)$, son independientes, que $N(1)$ tiene distribución de Poisson de media $2\times 1 = 2$ y que $N(4) - N(1)$ tiene distribución de Poisson de media $2 \times 3 = 6$ se obtiene

$$P\big(\,N(1) = 3\,,\, N(4) = 8\,\big) = P\big(N(1) = 3\,,\, N(4) - N(1) = 5\big)$$
$$= P\big(N(1) = 2\big)\; P\big(N(4) - N(1) = 5\big) = e^{-2}\frac{2^3}{3!}e^{-6}\frac{6^5}{5!}$$

c) *Calcula $P(N(3) < N(1) + 2)$*

   Solución.

$$P(N(3) - N(1) < 2) = P(N(3) - N(1) = 0) + P(N(3) - N(1) = 1) = e^{-4}(1 + 4) = 5e^{-4}$$

d) *Calcula $E[N(3)^2]$*

   Solución.

$$E[N(3)^2] = \mathrm{VAR}[N(3)] + E[N(3)]^2 = 6 + 36 = 42$$

Ejercicio 8 *(1 punto)*

Sea $X(t) = A\cos(wt)$ donde w es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[1, 3]$ y A es una variable aleatoria independiente de w con $P(A = 1) = 0.2$ y $P(A = 2) = 0.8$. Calcula la media del proceso $E[X(t)]$.

Solución.

$$E[X(t)] = E[A]E[\cos(wt)] = (0.2 + 2 \times 0.8) \int_1^3 \cos(wt)\frac{1}{2}dw = 0.9\frac{\sin(3t) - \sin(t)}{t}$$