ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
FINAL (Primavera 2014) **Duración:** 2 horas 30'
FECHA: 2 de Junio de 2014
Fecha publicación notas: 9-06-2014 **Fecha revisión examen:** 12-06-2014
APELLIDOS Y NOMBRE:
DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *(1.5 puntos) Un ordenador se avería con probabilidad,* 0.01, 0.001 *y* 0.05, *respectivamente, si su fuente de alimentación tiene un voltaje* X*, menor de* 100 *voltios, entre* 100 *voltios y* 120 *voltios, y superior a* 120 *voltios. Supongamos que* X *sigue una distribución normal de media* 110 *voltios y desviación típica* 10 *voltios.*

a) Calcula la probabilidad de que el ordenador se averíe.

Solución.

Sea A el suceso "el ordenador de avería"

Sabemos que: $P(A/X < 100) = 0.01,\ P(A/100 < X < 120) = 0.001,\ P(A/X > 120) = 0.05$

Aplicando el teorema de la probabilidad total tendremos la probabilidad pedida

$$P(A) = P(X < 100)P(A/X < 100)+P(100 < X < 120)P(A/100 < X < 120)+P(X > 120)P(A/X > 120)$$

Como $X \sim N(110, 10)$, resulta

$$P(X < 100) = P(Z < -\frac{10}{10}) \simeq 0.158$$
$$P(100 < X < 120) = P(-\frac{10}{10} < Z < \frac{10}{10}) \simeq 0.682$$
$$P(X > 120) = 1 - P(X < 120) = 1 - P(Z < \frac{10}{10}) \simeq 0.158$$

Finalmente

$$P(A) = 0.158 \cdot 0.01 + 0.682 \cdot 0.001 + 0.158 \cdot 0.05 \simeq 0.01022$$

b) Calcula la probabilidad de que el voltaje de la fuente de alimentación sea mayor de 120 *voltios si el ordenador no está averiado.*

Solución.

Aplicando la fórmula de Bayes resulta

$$\begin{aligned} P(X > 120/\overline{A}) =& \frac{P(\overline{A}/X > 120)P(X > 120)}{P(\overline{A})} \\ =& \frac{(1 - P(A/X > 120))P(X > 120)}{1 - P(A)} \\ =& \frac{0.95 \cdot 0.158}{1 - 0.01022} \simeq 0.152 \end{aligned}$$

Ejercicio 2 *(1 punto) El número medio de personas que acuden a un local es 1000 con una desviación típica de 20. Utilizando la desigualdad de Chebyshev calcula el número de sillas mínimo para que todos los asistentes puedan sentarse con una probabilidad de al menos 0.75.*

Solución.

Sea X la variable aleatoria "número de personas que acuden al local".

$$P(-k\sigma \leq X - \mu \leq k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

$$1 - \frac{1}{k^2} = 0.75, \quad k = 2$$

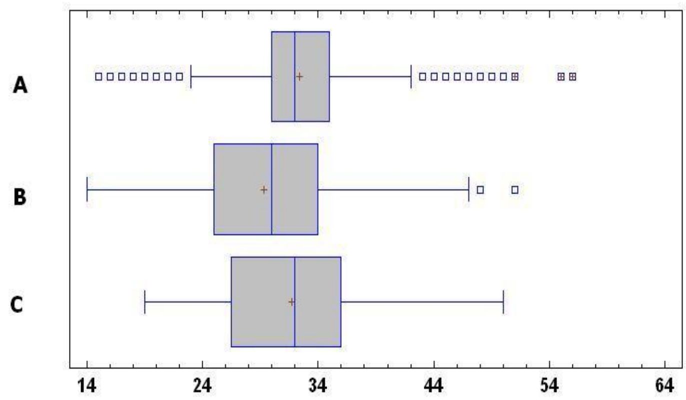
$$P(-2\sigma \leq X - \mu \leq 2\sigma) \geq 0.75$$

$$P(1000 - 2 \cdot 20 \leq X \leq 1000 + 2 \cdot 20) \geq 0.75$$

$$P(960 \leq X \leq 1040) \geq 0.75$$

Serán necesarias, como mínimo, 1040 sillas.

Ejercicio 3 *(1 punto) El gráfico representa el diagrama de cajas múltiple de una magnitud medida en tres subpoblaciones A, B y C.*



a) *¿Qué es mayor, el primer cuartil de A o la media de C?* ***Solución.*** *La media de C.*

b) *¿Qué subpoblación tiene menor rango intercuartílico?* ***Solución.*** *A*

c) *¿En qué subpoblaciones la media supera a la mediana.* ***Solución.*** *A*

d) *¿Cuál de las tres subpoblaciones tiene el menor dato no atípico?* ***Solución.*** *B*

e) *¿Qué es mayor, el tercer cuartil de C o el cuantil de orden 0.5 de B?* ***Solución.*** *Tercer cuartil de C.*

Ejercicio 4 *(1.5 puntos) Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de la v.a X. Sabemos que el estadístico $T = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} - \theta$ sigue una distribución exponencial de parámetro n.*

a) Calcula L y U (en función de n) de manera que

$$P(T \leq L) = \frac{\alpha}{2} = P(T \geq U)$$

siendo $\alpha = 0.01$

Solución.

Como $T \sim Exp(n)$ tendríamos:

$$P(T \leq t) = \int_0^t ne^{-nx}\,dx = -e^{-nx}\Big]_0^t = 1 - e^{-nt}, \quad t > 0$$

Por tanto

$$P(T \leq L) = 1 - e^{-nL} = \frac{0.01}{2} \Rightarrow L = -\frac{\ln(0.995)}{n}$$

$$P(T \geq U) = 1 - P(T \leq U) = e^{-nU} = \frac{0.01}{2} \Rightarrow U = -\frac{\ln(0.005)}{n}$$

b) Obtén, a partir de los extremos L y U calculados en el apartado anterior, un intervalo de confianza al 99 % para θ sabiendo que en una muestra aleatoria simple de X de tamaño $n = 15$ el valor mínimo es 23.5.

Solución.

$$P(L < T < U) = 1 - \alpha = 0.99$$

$$P(L < \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} - \theta < U) = P(\text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} - U < \theta < \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} - L)$$

Como en la muestra $n = 15$ y $\text{mín}\{x_1, \ldots, x_n\} = 23.5$,

$$\left(23.5 + \frac{\ln(0.005)}{n}, 23.5 + \frac{\ln(0.995)}{n}\right) = (23.14, 23.49)$$

sería el intervalo de confianza al 99 % para θ

Ejercicio 5 *(1.5 puntos) Sea (X, Y) una variable aleatoria bidimensional con función de probabilidad conjunta dada por: ($\alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0$)*

$X \backslash Y$	$Y = \alpha$	$Y = 1$
$X = \alpha$	*1/4*	*0*
$X = -\alpha$	*0*	*3/4*

a) Calcula, en función de α, $E[X]$, $E[Y]$ y $\mathrm{COV}(X, Y)$

Solución.

$$\begin{aligned}
E[X] =& \alpha\frac{1}{4} - \alpha\frac{3}{4} = -\frac{\alpha}{2} \\
E[Y] =& \alpha\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \\
\mathrm{COV}(X, Y) =& E[X \cdot Y] - E[X] \cdot E[Y] \\
=& \alpha^2\frac{1}{4} - \alpha\frac{3}{4} + \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{3}{4}\right) \\
=& \frac{3\alpha^2 - 3\alpha}{8} = \frac{3}{8}(\alpha^2 - \alpha)
\end{aligned}$$

b) Calcula el valor de α para el que $\mathrm{COV}(X, Y)$ es mínima ¿Cuál es el valor mínimo de la covarianza?

Solución.

Derivando respecto a α e igualando a cero obtendríamos:

$$\frac{d}{d\alpha}\mathrm{COV}(X, Y) = \frac{3}{8}(2\alpha - 1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

El valor mínimo de la covarianza es :

$$\min \mathrm{COV}(X, Y) = \frac{3}{8}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) \simeq -0.09$$

Ejercicio 6 *(1.5 puntos)*

El número de mensajes que llegan a un multiplexor en el intervalo $[0, t)$ es un proceso de Poisson de tasa 15 mensajes por segundo. Sea N_i la variable aleatoria que mide el número de mensajes que llegan entre el segundo $i - 1$ y el segundo i, con $i = 1, 2, \ldots, 60$ (por ejemplo N_2 mide el número de mensajes que llegan entre el segundo 1 y el segundo 2).

a) Cuál es la distribución de N_i, para $i = 1, 2, \ldots 60$

Solución.

Sea $N(t)$ el número de mensajes que llegan en el intervalo $[0, t)$.

Por ser un proceso de Poisson, para cada valor de t fijo, $N(t) \sim Pois(15t)$

N_i, para $i = 1, 2, \ldots 60$ tiene igual distribución que $N(1)$

$N(1) \sim Pois(15)$

Por tanto, $N_i \sim Pois(15), \quad i = 1, \ldots 60$

b) Considera la variable aleatoria $N = N_1 + \ldots + N_{60}$

Calcula $E(N)$ *y* $Var(N)$*.*

Solución.

$$E(N_i) = 15, \quad Var(N_i) = 15$$

$$E(N) = E(N_1 + \ldots N_{60}) = 60 \cdot E(N_1) = 60 \cdot 15 = 900$$

$$Var(N) = Var(N_1 + \ldots N_{60}) = 60 \cdot Var(N_1) = 60 \cdot 15 = 900$$

Donde hemos tenido en cuenta que $N(1), N(2)-N(1), \ldots, N(60)-N(59)$ son variables aleatorias independientes.

c) Utiliza el Teorema Central del Límite para calcular un valor aproximado de la probabilidad de que lleguen más de 950 mensajes en un minuto.

Solución.

N sigue aproximadamente una distribución normal, de media $\mu = 900$ y desviación típica $\sigma = 30$

$$P(N > 950) \approx P\left(Z > \frac{950 - 900}{30}\right) = 1 - F_Z(5/3) = 1 - F_Z(1.66) = 1 - 0.951 = 0.049$$

d) ¿Qué distribución exacta sigue N*?*

Solución.

N mide el número de mensajes que llegan en 1 minuto.

N tiene igual distribución que $N(60)$, entonces

$$N \sim Pois(15 \cdot 60), \qquad N \sim Pois(900)$$

e) Utilizando la distribución del apartado anterior, obtén una expresión de la probabilidad de que lleguen más de 950 mensajes en un minuto (dejando indicada la operación).

Solución.

$$P(N = i) = e^{-900}\,\frac{900^i}{i!}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P(N > 950) = e^{-900} \sum_{i=951}^{+\infty} \frac{900^i}{i!} = 1 - e^{-900} \sum_{i=0}^{950} \frac{900^i}{i!}$$

Ejercicio 7 *(2 puntos) Sea el proceso $X(t) = At$ para $t > 0$, donde A es una variable aleatoria con distribución uniforme en (0,1).*

a) *Determina la forma de las realizaciones ¿Cuál tiene la máxima pendiente?*

Solución.

Son las rectas $x(t) = ct, \quad c \in (0, 1)$. La máxima pendiente es 1.

b) *Calcula la media, varianza y la función de autocorrelación del proceso.*

Solución.

$$E[X(t)] = E(At) = tE(A) = t/2$$

$$Var[X(t)] = Var(at) = t^2 Var(A) = t^2/12$$

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = E(t_1 t_2 A^2) = t_1 t_2 E(A^2) = t_1 t_2 [Var(A) + (E(A))^2] = \frac{t_1 t_2}{3}$$

c) *¿Es el proceso estacionario en sentido amplio?*

Solución.

No. Al depender la media del proceso del tiempo, no puede ser ESA.

d) *Calcula $P(X(2) > 1)$*

Solución.

$$P(X(2) > 1) = P(2A > 1) = P(A > 1/2) = 1/2$$

e) *Calcula $P(X(5) < 3,\ X(4) \leq 2)$*

Solución.

$$P(X(5) < 3,\ X(4) \leq 2) = P(5A < 3,\ 4A \leq 2) = P\left(A < \frac{3}{5},\ A \leq \frac{1}{2}\right) = P(A \leq 1/2) = 1/2$$

f) *Determina la covarianza y el coeficiente de correlación entre entre $X(1)$ y $X(2)$.*

Solución.

$$Cov[X(1), X(2)] = C_X(1, 2) = R_X(1, 2) - E[X(1)]E[X(2)] = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$$

$$\rho[X(1), X(2)] = \frac{Cov[X(1), X(2)]}{\sqrt{Var[X(1)]Var[X(2)]}} = \frac{1/6}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{4}{12}}} = 1$$