ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
EXAMEN FINAL (Primavera 2015) **Duración:** 3 horas
FECHA: 2 de Junio de 2015
Fecha publicación notas: 11 de Junio de 2015
Fecha revisión examen: 16 de Junio de 2015
APELLIDOS Y NOMBRE:
DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *(1 punto) Se tiran dos dados. A continuación se vuelven a tirar los dados en los que no se haya obtenido un seis (que pueden ser ninguno, uno o los dos). Calcula la probabilidad de obtener finalmente dos seises (es decir, que después de este proceso queden sobre la mesa dos seises).*

Solución.

Sea $A \equiv$ obtener al final 2 seises y

$$\begin{aligned} S_0 &\equiv \text{obtener en la primera tirada 0 seises} \\ S_1 &\equiv \text{obtener en la primera tirada 1 seis} \\ S_2 &\equiv \text{obtener en la primera tirada 2 seises} \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(A) &= P(S_0)P(A/S_0) + P(S_1)P(A/S_1) + P(S_2)P(A/S_2) \\ &= \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{36} + \frac{10}{36} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{36} \cdot 1 = 121/1296 \approx 0.0933 \end{aligned}$$

Ejercicio 2 *(1 punto) Se realiza una prueba para separar los objetos A de los objetos que no son A. Si el objeto no es A la prueba da N con probabilidad 0.99. Si el objeto es A la prueba da N con probabilidad 0.02. El $40\,\%$ de los objetos son A.*

a) Calcula la probabilidad de que un objeto que ha dado N sea A.

Solución.

La probabilidad de que un objeto que ha dado N sea A es

$$\begin{aligned} P(A/N) &= \frac{P(A \cap N)}{P(N)} \\ &= \frac{P(A)P(N/A)}{P(A)P(N/A) + P(\overline{A})P(N/\overline{A})} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.02}{0.4 \cdot 0.02 + 0.6 \cdot 0.99} \approx 0.0133 \end{aligned}$$

(b) Calcula la probabilidad de que un un objeto que no ha dado N sea A.

Solución. La probabilidad de que un un objeto que no ha dado N sea A es

$$\begin{aligned} P(A/\overline{N}) &= \frac{P(A \cap \overline{N})}{P(\overline{N})} \\ &= \frac{P(A)P(\overline{N}/A)}{P(A)P(\overline{N}/A) + P(\overline{A})P(\overline{N}/\overline{A})} \\ &= \frac{0.4 \cdot 0.98}{0.4 \cdot 0.98 + 0.6 \cdot 0.01} \approx 0.9849 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 *(1 punto) Supongamos que la probabilidad de que una persona tenga un virus es* 0.01*. Se pretende analizar la sangre de 1000 personas . Para ello las dividimos en 100 grupos de 10 personas. Que una persona tenga el virus es independiente de que lo tengan los demás.*

a) *¿Cual es la probabilidad de que en un grupo de 10 personas, exactamente 2 tengan el virus?*

Solución.

El número de personas con el virus X es una variable aleatoria con distribución binomial $Bin(n = 10, p = 0.01)$. Entonces la probabilidad de que dos tengan el virus es

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.01^2\, 0.99^8 \approx 0.0042$$

(b) *Calcula la función de probabilidad de* $Y \equiv$ *número de grupos en los que alguna persona tiene el virus.*

Solución.

$Y \sim B(100, p)$ donde

$$p = 1 - 0.99^{10} \approx 0.0956$$

y entonces

$$P(X = n) = \binom{100}{n} p^n q^{100-n} \quad n = 0, 1, \ldots, 100$$

Ejercicio 4 *(1 punto)*

Sea X *una variable aleatoria con función de densidad*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & 0 < x < 2 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}$$

a) *Calcula* $P\Big(\Big|X - \dfrac{3}{2}\Big| \le 1\Big)$

Solución.

$$P\Big(\Big|X - \frac{3}{2}\Big| \le 1\Big) = P\Big(\frac{1}{2} \le X \le \frac{5}{2}\Big) = \int_{1/2}^{2} \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{63}{64}$$

(b) *Calcula el cuantil* $q_{0.3}$ *de orden* 0.3 *de* X*.*

Solución.

Para $x \in [0, 2]$,

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{8}\xi^2 d\xi = x^3/8$$

El cuantil $q_{0.3}$ es el número que cumple

$$F(q_{0.3}) = \frac{q_{0.3}^3}{8} = 0.3$$

Entonces

$$q_{0.3} = (8 \cdot 0.3)^{1/3} \approx 1.3389$$

Ejercicio 5 *(2 puntos) Para contrastar si la media de una variable aleatoria, con distribución normal de varianza 4, es 7, se utiliza una muestra de tamaño* $n = 100$. *Se considera como hipótesis alternativa* $\mu \neq 7$.

(a) *Con un nivel de significación* $\alpha = 0.04$, *¿cuál sería el intervalo de aceptación del estadístico de contraste* $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ *? ¿Para que valores de la media muestral* $\overline{x}$ *se aceptaría la hipótesis nula* $\mu = 7$*?*

Solución.

Utilizamos el estadístico de contraste

$$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\overline{X} - 7}{0.2}$$

que, suponiendo que la hipótesis nula se verifica, tiene distribución $N(0,1)$. Como el cuantil de orden 0.98 de una $N(0,1)$ es $q_{0.98} = 2.06$, la hipótesis nula se aceptaría si

$$-2.06 \leq \frac{\overline{x} - 7}{0.2} \leq 2.06$$

o equivalentemente si

$$7 - 2.06 \cdot 0.2 = 6.588 \leq \overline{x} \leq 7 + 2.06 \cdot 0.2 = 7.412$$

(b) *Si se obtiene una media muestral* $\overline{x} = 7.6$ *¿cuál sería el p-valor?*

Solución.

El estadístico de contraste tomaría el valor

$$\frac{7.6 - 7}{0.2} = 3$$

y entonces el p-valor sería

$$p = 2P(Z > 3) = 2[1 - P(Z < 3)] = 2[1 - \Phi(3)] \approx 2[1 - 0.99865] \approx 0.0027$$

Ejercicio 6 *(1.5 puntos) Un experimento consiste en lanzar dos veces una moneda en la que la probabilidad de cara es el triple que la de cruz. Si sale cara en el primer lanzamiento hacemos* $X = 1$ *y si sale cruz* $X = 0$. *La misma asignación se hace para el resultado* Y *del segundo lanzamiento.*

(a) *Calcula la función de probabilidad conjunta de* (X, Y).

Solución.

El espacio muestral es, $\Omega = \{\text{cc}, \text{c+}, \text{+c}, \text{++}\}$

$P(\text{cara}) = 3 \cdot P(\text{cruz}) \Rightarrow 4 \cdot P(\text{cruz}) = 1 \Rightarrow P(\text{cara}) = 3/4, \quad P(\text{cruz}) = 1/4$

$$P(\{\text{cc}\}) = 9/16, \quad P(\{\text{c+}\}) = 3/16, \quad P(\{\text{+c}\}) = 3/16, \quad P(\{\text{++}\}) = 1/16$$

La variable aleatoria (X, Y) está definida del siguiente modo:

$$
\begin{array}{ccc}
\Omega & \xrightarrow{(X,Y)} & \mathbb{R}^2 \\
++ & \longrightarrow & (0,0) \\
+c & \longrightarrow & (0,1) \\
c+ & \longrightarrow & (1,0) \\
cc & \longrightarrow & (1,1)
\end{array}
$$

Su función de probabilidad vendrá dada por:

$Y\backslash X$	0	1
0	1/16	3/16
1	3/16	9/16

(b) *Definimos la variable aleatoria $Z = XY$. Halla la función de probabilidad de Z.*

Solución.

$$
\begin{aligned}
P(Z=0) &= P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0) \\
&= \frac{1}{16}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16} \\
P(Z=1) &= P(X=1,Y=1)=\frac{9}{16}
\end{aligned}
$$

(c) *Calcula $E(2^{XY})$.*

Solución.

$$
E(2^{XY}) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1} 2^{i\cdot j}P(X=i,Y=j) = 2^{0\cdot 0}\frac{1}{16}+2^{0\cdot 1}\frac{3}{16}+2^{1\cdot 0}\frac{3}{16}+2^{1\cdot 1}\frac{9}{16}=\frac{25}{16}
$$

De otro modo,

$$
E(2^{XY}) = E(2^Z) = 2^0\cdot P(Z=0)+2^1\cdot P(Z=1)=\frac{7}{16}+2\cdot\frac{9}{16}=\frac{25}{16}
$$

Ejercicio 7 *(1 punto) La función de densidad conjunta del vector aleatorio (X,Y) viene dada por*

$$
f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{ye^{-xy}}{2} & \textit{si} \quad x>0,\ 0<y<2 \\ 0 & \textit{en otro caso} \end{cases}
$$

a) *Calcula la distribución marginal de Y y la media de Y.*

Solución.

$$
f_Y(y)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^{\infty}\frac{y}{2}\mathrm{e}^{-xy}\,dx = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-xy}\big|_0^{\infty}=\frac{1}{2} & \text{si} \quad 0<y<2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
$$

Como $Y\sim U(0,2)$, será $E[Y]=1$

(b) *Calcula $P(1/2 < X < 1, Y < 1)$*

Solución.

$$\begin{aligned}
P(1/2 < X < 1, Y < 1) &= \int_0^1 \frac{1}{2}\left(\int_{1/2}^1 y\mathrm{e}^{-xy}\,dx\right)\,dy \\
&= \int_0^1 -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-xy}\Big|_{1/2}^1\,dy = \int_0^1 -\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-y}-\mathrm{e}^{-y/2})\,dy \\
&= \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}^{-y}-2\mathrm{e}^{-y/2})\Big|_0^1 = \frac{1+\mathrm{e}^{-1}-2\mathrm{e}^{-1/2}}{2}
\end{aligned}$$

Ejercicio 8 *(1.5 puntos) Dado el proceso aleatorio $X(t) = Y + Zt$ donde Y y Z son dos variables aleatorias normales independientes, ambas de media 0 y varianza 1, halla*

(a) *La media, autocorrelación y varianza del proceso.*

Solución.

$$\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[Y] + t\cdot E[Z] = 0 \\
R_X(t,t+\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] = E[(Y+Zt)(Y+Z(t+\tau)] \\
&= E[Y^2 + YZ(2t+\tau) + Z^2 t(t+\tau)] \\
&= E[Y^2] + (2t+\tau)E[YZ] + t(t+\tau)E[Z^2] = 1 + t(t+\tau) \\
\mathrm{VAR}(X(t)) &= R_X(t,t) = 1 + t^2
\end{aligned}$$

(b) *Las distribuciones de primer orden del proceso.*

Solución.

Para cada t fijo

$$X(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} \sim N_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

por ser Y y Z variables aleatorias normales independientes de media 0 y varianza 1

Resulta finalmente

$$X(t) \sim N\left(\begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}\right) \equiv N(0, \sigma^2 = 1 + t^2)$$

(c) *Las distribuciones de segundo orden del proceso.*

Solución.

Como

$$\begin{pmatrix} X(t) \\ X(t+\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 1 & t+\tau \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$$

resulta que

$$\left(\begin{array}{c} X(t) \\ X(t+\tau) \end{array}\right) \sim N_2\left(\left(\begin{array}{cc} 1 & t \\ 1 & t+\tau \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1 & t \\ 1 & t+\tau \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ t & t+\tau \end{array}\right)\right)$$

Operando resultaría:

$$\left(\begin{array}{c} X(t) \\ X(t+\tau) \end{array}\right) \sim N_2\left(\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} 1+t^2 & 1+t(t+\tau) \\ 1+t(t+\tau) & 1+(t+\tau)^2 \end{array}\right)\right)$$

(d) *La distribución de* $X(1)+2X(5)$.

Solución.

Como

$$X(1)+2X(5) = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} X(1) \\ X(5) \end{array}\right)$$

resulta que $X(1)+2X(5)$ sigue una distribución normal de media

$$\mu = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right) = 0$$

y teniendo en cuenta que la matriz de covarianzas de $\left(\begin{array}{c} X(1) \\ X(5) \end{array}\right)$ es $\left(\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 6 & 26 \end{array}\right)$, la varianza es

$$\sigma^2 = \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 2 & 6 \\ 6 & 26 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right) = 130$$

es decir,

$$X(1)+2X(5) \sim N(0, \sigma^2 = 130)$$