ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
EXAMEN FINAL (Primavera 2015-16) **Duración:** 3 horas
FECHA: 7 de Junio de 2016
Fecha publicación notas: 13 de Junio de 2016
Fecha revisión examen: 16 de Junio de 2016
APELLIDOS: **NOMBRE:**
DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *(0.5 puntos) Prueba que si $P(B/A) = P(B/\overline{A})$, entonces los sucesos A y B son independientes.*

Solución.

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B \cap \overline{A})}{P(\overline{A})} = P(B/\overline{A})$$

$$P(A)P(B \cap \overline{A}) = P(\overline{A})P(B \cap A) = [1 - P(A)]P(B \cap A)$$

$$P(A)[P(B) - P(B \cap A)] = P(B \cap A) - P(A)P(B \cap A)$$

$$P(A)P(B) = P(B \cap A)$$

Ejercicio 2 *En una caja hay 3 bolas de las que no se conoce el color. Sólo se sabe que es igual de probable que haya entre ellas 0, 1, 2 ó 3 blancas.*

Se introduce una bola blanca en la caja. A continuación se extrae una bola al azar.

(a) *(0.5 puntos) Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.*

Solución.

Sean los sucesos A_i "En la caja había inicialmente i bolas blancas", $i = 0, 1, 2, 3$

Sea B el suceso " La bola extraída es blanca"

Sabemos que $P(A_i) = 1/4$.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B/A_0)P(A_0) + P(B/A_1)P(A_1) + P(B/A_2)P(A_2) + P(B/A_3)P(A_3) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + 1\right) = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

(b) *(0.5 puntos) Si la bola extraída no es blanca, calcula la probabilidad de que hubiera inicialmente en la caja 2 bolas blancas.*

Solución.

$$P(A_2/\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}/A_2)P(A_2)}{P(\overline{B})} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{6}$$

Ejercicio 3 *Se ha estimado que* 0.55 *es la probabilidad de que nazca un varón y* 0.45 *la de que nazca una mujer.*

1. *Se considera una familia con 4 hijos.*

   (a) *(0.2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que los 4 hijos sean varones?*

   Sea X la variable aleatoria "número de hijos varones de la familia"

   Solución.

   $X \sim Bin(n = 4, p = 0.55)$

$$P(X = i) = \binom{4}{i} 0.55^i \cdot 0.45^{4-i}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$P(X = 4) = \binom{4}{4} 0.55^4 = 0.0915$$

   (b) *(0.2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de haya exactamente 2 varones?*

   Solución.

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} 0.55^2 \cdot 0.45^2 = 0.3675$$

   (c) *(0.2 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos 1 varón?*

   Solución.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{4}{0} 0.55^0 \cdot 0.45^4 = 1 - 0.45^4 = 0.958$$

   (d) *(0.3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que haya por lo menos 1 de cada sexo?*

   Solución.

$$P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{4}{1} 0.55^1 \cdot 0.45^3 + \binom{4}{2} 0.55^2 \cdot 0.45^2 + \binom{4}{3} 0.55^3 \cdot 0.45^1 = 0.867$$

   (e) *(0.3 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que haya 1 o 2 mujeres?*

   Solución.

$$P(X = 2) + P(X = 3) = \binom{4}{2} 0.55^2 \cdot 0.45^2 + \binom{4}{3} 0.55^3 \cdot 0.45^1 = 0.667$$

2. *(0.3 puntos) Calcula el mínimo número de hijos que debe tener una familia para que la probabilidad de que dos o más de ellos sean mujeres sea mayor que* 0.4.

   Solución.

   Sea Y la variable aleatoria "número de mujeres en una familia de n hijos"

   $Y \sim Bin(n, p = 0.45)$

$$P(Y = i) = \binom{n}{i} 0.45^i \cdot 0.55^{n-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n$$

Si $n=2$

$$P(Y=i)=\binom{2}{i}0.45^i\cdot 0.55^{2-i},\quad i=0,1,2$$

$$P(Y\geq 2)=P(Y=2)=\binom{2}{2}0.45^2\cdot 0.45^{2-2}=0.202$$

Si $n=3$

$$P(Y=i)=\binom{3}{i}0.45^i\cdot 0.55^{3-i},\quad i=0,1,2,3$$

$$P(Y\geq 2)=P(Y=2)+P(Y=3)=\binom{3}{2}0.45^2\cdot 0.55^1+\binom{3}{3}0.45^3\cdot 0.55^0=0.425>0.4$$

El número mínimo de hijos es 3.

Ejercicio 4 *Un voltaje aleatorio $V\sim U(-3,7)$ se aplica a un resistor cuya resistencia R es una variable aleatoria discreta que toma los valores 5 y 12 con igual probabilidad y es independiente de V.*

(a) *(0.5 puntos) Calcula el cuantil de orden 0.3 de V.*

Solución.

La función de densidad de V viene dada por

$$f_V(v)=\begin{cases}\frac{1}{10} & \text{si } v\in(-3,7)\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

Si $q_{0.3}$ es el cuantil de orden 0.3 de la variable aleatoria V se verifica que,

$$0.3=P\left(V\leq q_{0.3}\right)=\int_{-3}^{q_{0.3}}\frac{1}{10}\,dv=\frac{q_{0.3}+3}{10}\Rightarrow q_{0.3}=0$$

(b) *(0.8 puntos) Sea $P=\dfrac{V^2}{R}$ la potencia disipada por R. Calcula la potencia media.*

Solución.

Por ser V y R independientes, $E(P)=E\left(\dfrac{V^2}{R}\right)=E(V^2)\cdot E\left(\dfrac{1}{R}\right)$

$E(V^2)=\displaystyle\int_{-3}^{7}\frac{1}{10}\,v^2\,dv=\frac{37}{3}$

$E\left(\dfrac{1}{R}\right)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{120}$

$$E(P)=\frac{37}{3}\cdot\frac{17}{120}=\frac{629}{360}\cong 1.747$$

(c) *(0.7 puntos) Calcula la covarianza entre R y P.*

Solución.

$$Cov(R,P)=E(R\cdot P)-E(R)\cdot E(P)=E(V^2)-E(R)\cdot E(P)$$

$$E(R) = 5 \cdot \frac{1}{2} + 12 \cdot \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

$$Cov(R,P) = \frac{37}{3} - \frac{17}{2} \cdot \frac{629}{360} = \frac{-1813}{720} \cong -2.518$$

Ejercicio 5 *(0.5 puntos) El recorrido de una variable aleatoria bidimensional discreta (X,Y) es $\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.*

Su función de distribución verifica:

$$F_{(X,Y)}(1,1) = 1/8 \qquad F_{(X,Y)}(2,1) = 1/4$$

$$F_{(X,Y)}(1,2) = 5/8 \qquad F_{(X,Y)}(2,2) = 1$$

Calcula la función de probabilidad conjunta de (X,Y).

Solución.

$$P(X=1,Y=1) = F_{(X,Y)}(1,1) = 1/8$$

$$1/4 = F_{(X,Y)}(2,1) = P(X=1,Y=1) + P(X=2,Y=1) \Rightarrow P(X=2,Y=1) = 1/8$$

$$5/8 = F_{(X,Y)}(1,2) = P(X=1,Y=1) + P(X=1,Y=2) \Rightarrow P(X=1,Y=2) = 1/2$$

$$P(X=2,Y=2) = 1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = 1/4$$

Así pues, su función de probabilidad conjunta se puede escribir como:

Y \ X	1	2
1	1/8	1/8
2	1/2	1/4

Ejercicio 6 *(1 punto) Supongamos que una variable aleatoria X tiene distribución normal con media μ y desviación típica $\sigma = 0.01$. Para contrastar la hipótesis nula*

$$H_0 \equiv \quad \mu = 1$$

frente a la hipótesis alternativa $H_1 \equiv \quad \mu \neq 1$ nos basamos en una muestra de tamaño $n = 100$, para la que obtenemos una media de $\overline{x} = 1.002$ y utilizamos el estadístico de contraste

$$E = \frac{\overline{X} - 1}{\sigma/\sqrt{n}}$$

que tiene distribución $N(0,1)$. Calcula el p-valor del test. Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$, ¿aceptarías la hipótesis nula $\mu = 1$?

Solución.

El estadístico de contraste toma el valor

$$e = \frac{\overline{X} - 1}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{1,002 - 1}{0,01/10} = 2$$

Entonces el p-valor es

$$\text{p-valor} = 2P(E > 2) = 0,046$$

Con un nivel de significación $\alpha = 0,05$, la hipótesis nula se rechaza.

Ejercicio 7 *(1 punto) Obtén un intervalo con un nivel de confianza del 96 % para el parámetro θ de una determinada distribución de probabilidad, si se sabe que el estadístico $\dfrac{n \cdot \theta}{S_1} \sim \chi^2_n$ y que, en una muestra de tamaño $n = 30$, el valor de la cuasidesviación típica muestral es $s_1 = 3.5$.*

Nota 1 *Sea Y una variable aleatoria con distribución χ^2 con 30 grados de libertad. La siguiente tabla muestra los valores de su función de distribución en diferentes abcisas*

y	*16.306*	*17.908*	*29.336*	*44.833*	*47.962*
$P(Y \leq y)$	*0.02*	*0.04*	*0.5*	*0.96*	*0.98*

Solución.

El estadístico $\dfrac{30 \cdot \theta}{S_1}$ sigue una distribución χ^2_{30}.

$$0.96 = P\left(\leq q_{0.02} \leq \frac{30 \cdot \theta}{S_1} \leq q_{0.98} \right) = P\left(\leq q_{0.02} \frac{S_1}{30} \leq \theta \leq q_{0.98} \frac{S_1}{30} \right)$$

Un intervalo de confianza para θ será,

$$\left(q_{0.02} \frac{s_1}{30}, q_{0.98} \frac{s_1}{30} \right) = \left(16.306 \cdot \frac{3.5}{30}, 47.962 \cdot \frac{3.5}{30} \right) = (1.902, 5.595)$$

Ejercicio 8 *(0.5 puntos) Sea $X(t) = sen(t + \theta)$ donde θ es una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo $[0, \pi]$.*

(nótese que es en el intervalo $[0, \pi]$ y no en el intervalo más habitual $[0, 2\pi]$).

Teniendo en cuenta que $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$, calcula la media de $X(t)$

Solución.

$$E[X(t)] = E[\text{sen}\,(t + \theta)] = \int_0^\pi \text{sen}\,(t + \theta) \frac{1}{\pi} d\theta = -\frac{1}{\pi}[\cos(t + \pi) - \cos(t)] = \frac{2}{\pi} \cos(t)$$

Ejercicio 9 *Sea $X(t)$ un proceso estocástico normal, cuya media y autocovarianza son*

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = t \qquad y \qquad C_X(t, t + \tau) = COV\big[X(t), X(t + \tau)\big] = \frac{5}{1 + \tau^2}$$

(a) (0.5 puntos) Calcula la función de autocorrelación del proceso $X(t)$. ¿Es $X(t)$ un proceso estacionario en sentido estricto? (justifica la respuesta)

Solución.

$$R_X(t, t+\tau) = C_X(t, t+\tau) + \mu(t)\mu(t+\tau) = \frac{5}{1+\tau^2} + t(t+\tau)$$

Como la media $\mu_X(t)$ depende de t, $X(t)$ no es un proceso estacionario (ni en sentido amplio ni estricto).

(b) (1 punto) Calcula $P\big[X(4) - X(2) < 3\big]$

Solución.

Como el proceso es normal, la variable aleatoria $X(4) - X(2)$ tiene distribución normal, con media

$$E[X(4) - X(2)] = E[X(4)] - E[X(2)] = 4 - 2 = 2$$

y varianza

$$\begin{aligned} \mathrm{VAR}\,[X(4) - X(2)] &= \mathrm{VAR}\,[X(4)] + \mathrm{VAR}\,[X(2)] - 2\,\mathrm{COV}\,[X(2), X(4)] \\ &= C_X(3,3) + C_X(2,2) - 2C_X(2,4) = 5 + 5 - 2 = 8 \end{aligned}$$

Entonces

$$P[X(4) - X(2) < 3] = P\left[\frac{X(3) - X(2) - 2}{\sqrt{8}} < \frac{3-2}{\sqrt{8}}\right] = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) \approx 0.6382$$

donde Φ denota la función de distribución de una $N(0,1)$.

(c) (0.5 puntos) Calcula la media y la autocorrelación del proceso $Y(t) = X(t) - \mu_X(t)$. ¿Es $Y(t)$ un proceso estacionario en sentido estricto? (justifica la respuesta)

Solución.

Se tiene

$$\begin{aligned} &\mu_Y(t) = E[X(t) - \mu_X(t)] = E[X(t)] - \mu_X(t) = 0 \\ &R_Y(t, t+\tau) = E\Big[\big(X(t+\tau) - \mu_X(t+\tau)\big)\big(X(t) - \mu_X(t)\big)\Big] = C_X(t, t+\tau) = \frac{1}{1+\tau^2} \end{aligned}$$

Entonces $Y(t)$ es un proceso estacionario en sentido amplio, lo cual, como el proceso es normal, implica que es un proceso estacionario en sentido estricto.