Departamento de Matemática Aplicada a las T.I.C.

ASIGNATURA: ESTADÍSTICA Y PROCESOS ESTOCÁSTICOS
EXAMEN FINAL RESUELTO (Primavera 2016-17) **Duración:** 3 horas
FECHA: 30 de Mayo de 2017
APELLIDOS: **NOMBRE:**
DNI: **TITULACIÓN:**

Ejercicio 1 *Se lanza un dado tres veces. Sabiendo que se obtienen tres resultados diferentes, calcula:*

a) (0.5 puntos) La probabilidad de que no haya salido ningún 1.

Solución.

Sean $D \equiv$ los tres resultados son diferentes y $N \equiv$ no sale ningún uno.

Se tiene que $P(N/D) = \dfrac{V_{5,3}}{V_{6,3}} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \dfrac{1}{2}$.

También podría obtenerse el resultado mediante

$$P(N/D) = \frac{P(N \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{V_{5,3}}{VR_{6,3}}}{\frac{V_{6,3}}{VR_{6,3}}} = \frac{V_{5,3}}{V_{6,3}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}$$

b) (0.5 puntos) La probabilidad de que la suma sea 7.

Solución.

Con los tres resultados diferentes la suma sólo puede valer 7 cuando sale un 4, un 2 y un 1. Y esto puede ocurrir de $P_3 = 3!$ formas, así pues

$$P(S_7/D) = \frac{3!}{V_{6,3}} = \frac{3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{20}$$

Ejercicio 2 *Se tiene una bolsa con tres monedas M_1, M_2 y M_3. La primera está equilibrada y las otras dos están cargadas, de manera que la probabilidad de obtener cara en cada una de ellas es, respectivamente,* 0.6 *y* 0.1.

Se elige aleatoriamente una moneda de las tres y a continuación se lanza esta moneda tres veces.

a) (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara-cruz-cruz (exactamente en este orden)?

Solución.

Sea A el suceso "Se obtiene cara-cruz-cruz"

Sean E_i el suceso "Se elige la moneda i, $\quad i = 1, 2, 3$"

$P(E_i) = \dfrac{1}{3}, \quad i = 1, 2, 3$

$$P(A) = P(A/E_1)P(E_1)+P(A/E_2)P(E_2)+P(A/E_3)P(E_3) = \frac{1}{3}(0.5^3+0.6\cdot 0.4^2+0.1\cdot 0.9^2) = \frac{302}{3000}$$

b) (0.5 puntos) Suponiendo que se ha obtenido cara-cruz-cruz (exactamente en este orden), ¿cuál es la probabilidad de que se haya elegido la moneda equilibrada?

Solución.

$$P(E_1/A) = \frac{P(A/E_1)P(E_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.5^3}{\frac{302}{3000}} = \frac{125}{302}$$

Ejercicio 3

Supongamos que un conductor pierde su permiso de conducir en cuanto tiene tres multas por exceso de velocidad. La probabilidad de que un conductor sea multado en un desplazamiento es 0.01. (Se supone independencia entre los distintos desplazamientos).

a) *(0.3 puntos) Calcula la probabilidad de que un conductor reciba la primera multa en el décimo desplazamiento.*

Solución. *La variable aleatoria* $X \equiv$ *número de desplazamientos que debe hacer para que le multen por primera vez, tiene distribución geométrica con parámetro* $p = 0.01$. *Entonces*

$$P(X = 10) = 0.99^9 \cdot 0.01 \approx 0.0091$$

b) *(0.3 puntos) ¿Cuál es el número medio de desplazamientos que debe hacer para recibir la primera multa?*

Solución. $E(X) = \frac{1}{0.01} = 100$

c) *(0.3 puntos) Calcula la probabilidad de que reciba la primera multa no antes del tercer desplazamiento.*

Solución.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 2)] = 1 - (0.01 + 0.99 \cdot 0.01) = 0.9801$$

d) *(0.3 puntos) Calcula la función de probabilidad de la variable aleatoria* $Y \equiv$ *número de multas recibidas en diez desplazamientos.*

Solución.

Se tiene que $Y \sim Bin(n = 10, p = 0.01)$, y entonces

$$P(Y = i) = \binom{10}{i} 0.01^i \cdot 0.99^{10-i}, \quad i = 0, 1, \ldots, 10$$

e) *(0.4 puntos) Calcula la probabilidad de que un conductor pierda su permiso de conducir en el noveno desplazamiento.*

Solución.

La variable aleatoria $Z \equiv$ número de desplazamientos que debe hacer para que le retiren el permiso de conducir, tiene distribución $BN(r = 3, p = 0.01)$. Entonces

$$P(Z = 9) = \binom{8}{2} \cdot 0.01^3 \cdot 0.99^6$$

Ejercicio 4 *(0.5 puntos) La función de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X, Y) viene dada por:*
$P(X = 1, Y = 1) = 0.3, \quad P(X = 1, Y = 2) = 0.1, \quad P(X = 2, Y = 1) = 0.2, \quad P(X = 2, Y = 2) = 0.4$

Calcula $Cov(X, Y)$.

Solución. *En la siguiente tabla calculamos las distribuciones marginales*

	$X = 1$	$X = 2$	
$Y = 1$	*0.3*	*0.2*	*0.5*
$Y = 2$	*0.1*	*0.4*	*0.5*
	0.4	*0.6*	

Se tiene

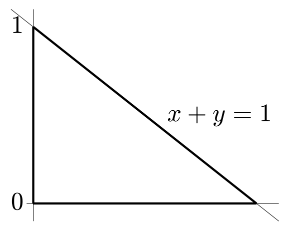
$$E[X] = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.6 = 1.6, \quad E[Y] = 1 \times 0.5 + 2 \times 0.5 = 1.5$$
$$E[XY] = 1 \cdot 1 \times 0.3 + 2 \cdot 1 \times 0.2 + 1 \cdot 2 \times 0.1 + 2 \cdot 2 \times 0.4 = 2.5$$

y entonces $\quad Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 2.5 - 1.6 \cdot 1.5 = 0.1$

Ejercicio 5 *La función de densidad conjunta del vector aleatorio (X, Y) viene dada por*
$f(x, y) = 6\,x$ en el triángulo limitado por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$.

a) (0.7 puntos) Calcula $E(Y)$.

Solución. $f_Y(y) = \int_0^{1-y} 6x dx = 3(1 - y)^2, \quad 0 \leq y \leq 1$

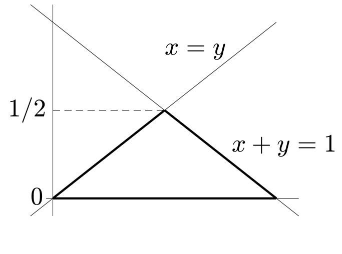


y entonces

$$E[Y] = \int_0^1 y \cdot 3(1 - y)^2 \; dy = 3 \int_0^1 y + y^2 - 2y dy = \frac{1}{4}$$

b) (0.8 puntos) Calcula $P(Y < X)$.

Solución. $P(Y < X) = \int_0^{1/2} \int_y^{1-y} 6x \; dxdy = \frac{3}{4}$



Ejercicio 6 *Se selecciona aleatoriamente una muestra de tamaño 100 de una población normal.*

a) *(0.7 puntos) Suponemos que se sabe que la población tiene media μ y varianza $\sigma^2 = 4$ y se quiere contrastar la hipótesis nula $H_0 : \mu = 3$ frente a la hipótesis alternativa $H_1 : \mu \neq 3$.*

¿Qué estadístico utilizarías para realizar el contraste?

Solución.

El estadístico adecuado es $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

Si H_0 es cierta, $T = \dfrac{\overline{X} - 3}{2/\sqrt{100}} \sim N(0, 1)$

Si se considera un nivel de significación $\alpha = 0.05$, ¿para qué valores de este estadístico aceptarías la hipótesis nula?

Solución.

Se aceptaría la hipótesis nula para los valores del estadístico que pertenezcan al intervalo $(-q_{0.975},\ q_{0.975}) = (-1.96, 1.96)$

siendo $q_{0.975}$ el cuantil de orden 0.975 de una distribución normal de media 0 y desviación típica 1.

b) *(0.6 puntos) Supongamos que el valor de la media de los 100 valores es 5. ¿Cuál es el p-valor del contraste? ¿Se debería rechazar $H_0 : \mu = 3$ con el nivel de significación especificado en el apartado anterior?*

Solución.

El valor del estadístico T en la muestra será $\dfrac{\overline{x} - 3}{2/\sqrt{100}} = 5(\overline{x} - 3) = 5(5 - 3) = 10.$

p-valor $= 2P(Z > 10) \approx 0$, con $Z \sim N(0, 1)$

Como p-valor < 0.05, no se acepta H_0.

Ejercicio 7 *(0.7 puntos) Obtén un intervalo de confianza al 88 % para el parámetro θ de una distribución de probabilidad si se sabe que el estadístico $\dfrac{(n+3)\theta}{\overline{X}}$ sigue una distribución $N(0, 1)$ y que, en una muestra de tamaño $n = 30$, el valor de la media muestral es $\overline{x} = 7.3$.*

Solución.

Siendo $q_{0.94}$ el cuantil de orden 0.94 de una distribución $N(0, 1)$, será

$$0.88 = P\left(-q_{0.94} \leq \frac{(n+3)\theta}{\overline{X}} \leq q_{0.94}\right) = P\left(-q_{0.94}\frac{\overline{X}}{n+3} \leq \theta \leq q_{0.94}\frac{\overline{X}}{n+3}\right)$$

Así, un intervalo de confianza al 88 % para θ será

$$\left(-q_{0.94}\frac{\overline{x}}{n+3},\ q_{0.94}\frac{\overline{x}}{n+3}\right) = \left(-1.55 \cdot \frac{7.3}{33},\ 1.55 \cdot \frac{7.3}{33}\right) = (-0.345,\ 0.345)$$

Ejercicio 8 *Se supone que* $N(t) \equiv$ *número de clientes que llegan a cierto servidor informático en el intervalo* $[0, t)$ *(*t *expresado en segundos) es un proceso de Poisson de tasa 2 clientes por segundo.*

b) *(0.2 puntos) Calcula el número medio de clientes que llegan en 6 segundos.*

Solución.

$N(t+6) - N(t)$ tiene igual distribución que $N(6)$.

Por tanto $E[N(t+6) - N(t)] = E[N(6)] = 12$

c) *(0.2 puntos) Calcula* $P[N(3) > N(5)]$

Solución.

Como $[0, 3) \subset [0, 5)$, se verifica que $N(3) \leq N(5)$ y $P[N(3) > N(5)] = 0$.

d) *(0.2 puntos) Calcula* $P[N(5) > N(3)]$

Solución.

Puesto que $N(5) - N(3)$ tiene igual distribución que $N(2)$ será,

$P[N(5) > N(3)] = P[N(5) - N(3) > 0] = P[N(2) > 0 = 1 - P[N(2) = 0 = 1 - e^{-4} \approx 0.981$

e) *(0.2 puntos) Calcula* $P[N(5) = 6/N(3) = 2]$

Solución.

$N(5) - N(3)$ tiene igual distribución que $N(2)$, por tanto,

$P[N(5) > N(3)] = P[N(5) - N(3) > 0] = P[N(2) > 0] = 1 - P[N(2) = 0] = 1 - e^{-4} \approx 0.981$

f) *(0.6 puntos) Calcula* $E([N(6) - N(2)]^2)$.

Solución.

$$E([N(6)-N(2)]^2) = Var[N(6)-N(2)]+(E[N(6)-N(2)])^2 = Var[N(4)]+(E[N(4)])^2 = 8+8^2 = 72$$

Ejercicio 9 *Sea* $X(t)$ *un proceso normal y estacionario con media* $\mu_X = 0$ *y función de autocorrelación* $R_X(\tau) = e^{-2|\tau|}$.

a) *(0.5 puntos) Calcula la función de autocorrelación del proceso* $Z(t) = AX(t) + B$ *donde donde* A *y* B *son variables aleatorias tales que* A, B *y* $X(t)$ *son independientes y*

$P(A = 1) = P(A = 0) = P(B = 1) = P(B = 0) = 1/2$

Solución.

Por ser A, B y $X(t)$ independientes, será,

$$\begin{aligned}
R_Z(t, t+\tau) &= E[Z(t) \cdot Z(t+\tau)] = E[(AX(t) + B)(AX(t+\tau) + B)] \\
&= E[A^2 X(t) X(t+\tau) + ABX(t) + ABX(t+\tau) + B^2] \\
&= E[A^2] E[X(t) X(t+\tau)] + E[A] E[B] E[X(t)] + E[A] E[B] E[X(t+\tau)] + E[B^2]
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$E(A) = E(B) = \dfrac{1}{2}, \quad E(A^2) = E(B^2) = \dfrac{1}{2}$

$E[X(t)] = 0, \quad E[X(t+\tau)] = 0, \quad E[X(t)X(t+\tau)] = R_X(\tau)$

Entonces, $R_Z(t, t+\tau) = \dfrac{1}{2}e^{-2|\tau|} + \dfrac{1}{2}$

b) (0.5 puntos) Calcula $P[X(5) + X(3) > 2]$.

Solución.

Sabemos que $X(t)$ es un proceso normal estacionario con

$E[X(t)] = 0, \quad Var[X(t)] = R_X(0) = 1 \quad$ y $\quad Cov(X(3), X(5)) = R_X(2) = e^{-4}$

Si $\overline{\mu}$ es el vector de medias y M la matriz de covarianzas, será,

$$\begin{pmatrix} X(3) \\ X(5) \end{pmatrix} \sim N_2\left(\overline{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ M = \begin{pmatrix} 1 & e^{-4} \\ e^{-4} & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Pero,

$$X(5) + X(3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(3) \\ X(5) \end{pmatrix}$$

Entonces $X(5) + X(3)$ es una variable aleatoria que sigue una distribución normal.

Su media es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

Su varianza es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{-4} \\ e^{-4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 + 2e^{-4}$

$$P[X(5) + X(3) > 2] = P\left(Z > \frac{2}{\sqrt{2 + 2e^{-4}}}\right) = 1 - F_Z\left(\frac{2}{\sqrt{2 + 2e^{-4}}}\right) = 1 - F_Z(1.40) \approx 0.08076$$