Capítulo 1

Sistemas de ecuaciones lineales

1.1. Sistemas de ecuaciones lineales

En el libro de Meyer [2] se recuerda la siguiente antiquísima cita.

> Tres gavillas de buen cereal, dos de mediocre y una de malo cuestan 39 dous. Dos gavillas de bueno, tres de mediocre y una de malo, 34 dous. Y una buena, dos mediocres y tres malas, 26 dous. ¿ Cuánto cuesta cada gavilla de buen cereal, de mediocre y de malo ?
> Jiuzhang Suanshu (Nine Chapters of the Mathematical Art) China, antes de 179 a.C.

Una *ecuación* es una igualdad matemática que relaciona unas cantidades *incógnitas* con unos *datos* conocidos, a través de diversas operaciones matemáticas. Por ejemplo:

$$3x - 6 = 0$$

es una ecuación en la cual la incógnita, como es habitual, se denota por x. Sabemos que se resuelve utilizando operaciones matemáticas que *despejan* la incógnita en términos de los datos, en este caso los números 3 y 6:

sumando 6 en ambos lados de la ecuación: $3x = 6$,
dividiendo ambos lados por 3: $x = 2$.

En esta asignatura trataremos de objetos generales, como las *ecuaciones lineales*, sin necesidad de especificar las cantidades numéricas concretas que figuran en ellos. Por ejemplo, la **ecuación lineal** en una variable (la incógnita) se denota por

$$ax - b = 0, \tag{1.1}$$

BORRADOR

queriendo decir que tratamos con una ecuación en donde la incógnita es la x, y las letras a y b denotan *datos* numéricos que no deseamos especificar en ese momento. La ecuación dada más arriba es un ejemplo concreto de este tipo. El calificativo de lineal significa que en la ecuación la incógnita aparece sólo multiplicada por un número y quizás con otros términos sumados a este producto. Por ejemplo, la ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

no es una ecuación lineal en la incógnita x.

En general, se puede definir una ecuación en la que haya varias incógnitas, que se suelen denotar* por la letra x con subíndices: x_1, x_2, $\ldots x_n$ siendo n un símbolo que denota el número de incógnitas que consideramos (así podemos también dejar sin concretar cuántas incógnitas tiene el problema)

Definición 1.1. *Una ecuación lineal en las variables* x_1, $x_2 \ldots x_n$ *es una expresión matemática de la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b \tag{1.2}$$

siendo b *y* $a_1, \ldots, a_n$ *datos numéricos.*

Una expresión que se puede, después de realizar operaciones aritméticas, escribir de la forma (1.2) también se considera una ecuación lineal.

Definición 1.2. *Un sistema de ecuaciones lineales en las variables* x_1, $x_2 \ldots x_n$ *es una colección de* m *ecuaciones lineales en esas variables:*

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n = b_2 \\ & & & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{1.3}$$

Por ejemplo, un sistema† de 3 ecuaciones en 3 variables (incógnitas) es

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 39 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 34 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 26 \end{array} \tag{1.4}$$

que corresponde al problema del Jiuzhang Suanshu citado al principio del capítulo.

---

*cuando hay sólo dos variables ($n = 2$) se suelen denotar por las letras x,y; cuando hay tres ($n = 3$) por x, y, z.

†utilizaremos simplemente la palabra *sistema* para denotar *sistema de ecuaciones lineales*.

Se denomina **solución** de un sistema de ecuaciones (1.3) a una sucesión de n números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tales que sustituyéndolos en las incógnitas, $x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$, las ecuaciones se satisfacen. Por ejemplo, se puede comprobar que $x_1 = \frac{37}{4}$, $x_2 = \frac{17}{4}$ y $x_3 = \frac{11}{4}$ es una solución de (1.4).

Ejemplo 1.3. Sea el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$x_1 - 2x_2 = -1 \tag{1.5}$$
$$-x_1 + 3x_2 = 3 \tag{1.6}$$

En la escuela es probable que hayamos aprendido el **método de sustitución** para resolver este sistema: se despeja una incógnita de la primera ecuación, por ejemplo x_1

$$x_1 = -1 + 2x_2$$

y se sustituye en la segunda, para obtener una ecuación con una sola incógnita:

$$-(-1 + 2x_2) + 3x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

Una vez resuelta esta ecuación para la incógnita x_2 usando la expresión de x_1 se averigua que

$$x_1 = -1 + 2 \cdot 2 = 3$$

con lo que la (única) solución es $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Un segundo procedimiento es el **método de reducción**. Sumar y restar ecuaciones produce una ecuación que también se ha de cumplir. Por ejemplo, la suma de las dos ecuaciones (1.5) y (1.6) es

$$x_2x_2 - x_1 + 3x_2 = -1 + 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2$$

Se pueden multiplicar ambos lados de una ecuación por un número no nulo para obtener una ecuación equivalente. Por ejemplo, si multiplicamos por 3 la ecuación (1.5) y por 2 la ecuación (1.6) obtenemos el siguiente par de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x_1 - 6x_2 &= -3 \\ -2x_1 + 6x_2 &= 6 \end{aligned}$$

de cuya suma se obtiene que $x_1 = 3$. El método de reducción es la utilización ordenada de sumas y productos de un número por ecuaciones para ir eliminando variables y obtener las soluciones. Es este método el que sistematizaremos en este capítulo.

BORRADOR

Finalmente, podemos dar una interpretación gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales dibujando, en el plano cartesiano (x_1, x_2) los conjuntos de puntos que satisfacen cada ecuación, y encontrando su intersección. En general, la ecuación

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$$

es la *ecuación implícita de una recta*. La *ecuación explícita* tiene la forma $x_2 = m x_1 + k$, donde m es la pendiente y k es la ordenada en el origen y puede obtenerse despejando x_2 de la explícita

$$x_2 = \frac{a_2}{a_1} x_1 + \frac{b}{k_1}$$

La representación gráfica de una recta sobre el plano cartesiano se ilustra en la figura 1.1.

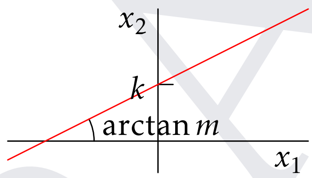

Figura 1.1: La gráfica de una recta $x_2 = m x_1 + k$.

Representando las rectas cuyas ecuaciones son (1.5) y (1.6) se obtiene el siguiente gráfico

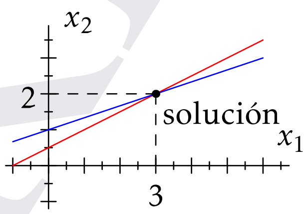

Figura 1.2: La solución gráfica del sistema (1.5)–(1.6).

El **conjunto solución** es el formado por todas las soluciones de un sistema de ecuaciones. Las soluciones de la ecuación lineal de una variable (1.1) son

$$ax - b = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = b/a & \text{si } a \neq 0 \\ \text{no existe} & \text{si } a = 0 \text{ y } b \neq 0 \\ \text{cualquier valor } x & \text{si } a = 0 \text{ y } b = 0 \end{cases}$$

BORRADOR

El conjunto solución en este caso se compone de una, ninguna o infinitas soluciones. Utilizando la interpretación gráfica de los sistemas de dos ecuaciones y dos variables podemos comprender que el conjunto solución también puede consistir de una, ninguna o infinitas soluciones. Esto es un hecho general para sistemas de ecuaciones lineales, como demostraremos en este capítulo.

Un sistema de *ecuaciones lineales* puede

1. no tener ninguna solución,
2. tener una solución,
3. o tener infinitas soluciones.

Ejercicio 1.4. Dad un ejemplo de ecuación que tenga sólo dos soluciones.

La notación matricial. Los autores del Jiuzhang Suanshu ya resolvían estos problemas, en cierto modo, utilizando matrices. Tomemos el ejemplo del sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & - & 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & -9 \end{array}$$

La **matriz de coeficientes** de este sistema es la tabla rectangular

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

y la **matriz aumentada**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

La primera matriz tiene tres *filas* y tres *columnas*, y se dice que tiene unas dimensiones de 3 por 3 (3×3). La segunda matriz es de 3×4, es decir, de tres filas y cuatro columnas.

Resolución por reducción de filas. Utilizando el método de reducción, ordenadamente, podemos proceder a resolver el sistema anterior sumando cuatro por la primera ecuación a la tercera, para eliminar la variable x_1 de esta última:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ \boxed{0} & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

BORRADOR

Ahora podemos multiplicar por 1/2 la segunda y obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

y podemos anular la segunda variable de la tercera ecuación sumando tres veces por la segunda ecuación a la tercera

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & \boxed{0} & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{1.7}$$

El sistema cuya matriz aumentada es la anterior es

$$\begin{aligned} x_1 \; - \; 2x_2 \; + \; x_3 &= 0 \\ x_2 \; - \; 4x_3 &= 4 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

que es un *sistema triangular*. Este sistema se puede resolver por *sustitución regresiva*. Es decir, usando la última ecuación se encuentra el valor de la última variable $x_3 = -3$. Este valor se sustituye en la penúltima ecuación, que depende sólo de la variable adicional x_2, por lo que se averigua que $x_2 = 4 + 4x_3 = 4 + 4 \cdot 3 = 16$. Finalmente, en la antepenúltima ecuación se sustituyen estos dos valores para averiguar la variable precedente x_1. El método descrito de resolución de ecuaciones se denomina *método de Gauss*.

En los cálculos manuales suele ser ventajoso realizar la reducción hasta el final, sin usar la sustitución regresiva, lo que se denomina el *método de Gauss-Jordan*. En el ejemplo que tratamos, cuando se alcanza la matriz (1.7) correspondiente a un sistema triangular, en lugar de realizar la sustitución regresiva se siguen eliminando variables de las ecuaciones, pero esta vez usando ecuaciones de la parte baja para eliminar variables de las ecuaciones más altas. Se suma la tercera fila multiplicada por 4 a la segunda y se resta la tercera ecuación de la primera para obtener

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & \boxed{0} & -3 \\ 0 & 1 & \boxed{0} & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

habiéndose eliminado la tercera variable de las dos primeras ecuaciones. Ya sólo queda eliminar la segunda variable de la primera ecuación, o equivalentemente sumar 2 veces la segunda fila a la primera obteniéndose

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{0} & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

BORRADOR

Se alcanza así un *sistema diagonal*

$$\begin{array}{rcl} x_1 \qquad\qquad & = & 29 \\ x_2 \qquad & = & 16 \\ x_3 & = & 3 \end{array}$$

que expresa directamente la solución del sistema original.

Operaciones elementales de fila. En la resolución del sistema del ejemplo anterior hemos realizado los siguientes tipos de operaciones

1. **Operación $P_{i,j}$:** intercambiar dos filas
$$\text{fila } i \to \text{fila } j, \quad \text{fila } j \to \text{fila } i$$
2. **Operación $L_i(\alpha)$:** multiplicar una fila entera por una constante no nula
$$\alpha \times (\text{fila } i) \ \to \ \text{fila } i \qquad (\alpha \neq 0)$$
3. **Operación $L_{i,j}(\alpha)$:** sumar el múltiplo de una fila a otra:
$$\text{fila } i + \alpha \times (\text{fila } j) \ \to \ \text{fila } i$$

Dos matrices se dice que son **equivalentes por filas** si existe una sucesión de operaciones elementales de fila que las relaciona. Esta definición tiene sentido porque las operaciones elementales de fila son reversibles.

Ejercicio 1.5. Demostrad que las operaciones elementales de fila son reversibles, escribiendo la inversa de cada una con la notación P_{ij}, $L_i(\alpha)$ y $L_{ij}(\alpha)$.

Proposición 1.6. *Si dos sistemas lineales tienen matrices aumentadas asociadas que son equivalentes por filas, entonces estos sistemas son equivalentes, puesto que su conjunto solución es el mismo.*

Ejercicio 1.7. Demostrad que las operaciones elementales de filas no varían el conjunto solución del sistema asociado.

Existencia y unicidad. El problema matemático de resolver una ecuación requiere investigar dos cuestiones fundamentales:

1. **Existencia:** ¿ Existe alguna solución del problema ?
2. **Unicidad:** ¿ Es única la solución ?

En el caso de un sistema lineal, se dice que es **consistente** (o compatible) si existe al menos una solución. Más arriba estudiamos el caso de dos variables, en términos geométricos: el sistema es inconsistente si las rectas asociadas a las ecuaciones son paralelas. También se dice que, en el caso compatible, el sistema es determinado si tiene solución única, e indeterminado si tiene más de una solución (infinitas, como veremos)

Ejemplo 1.8. Estudiad si el siguiente sistema es consistente.

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & - & 4x_3 & = & 8 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 5x_1 & - & 8x_2 & + & 7x_3 & = & 1 \end{array}$$

1.2. Reducción por filas y forma escalonada

El **elemento principal** de una fila de una matriz es el elemento no nulo situado más a la izquierda de la fila.

Definición 1.9 (Matriz escalonada y matriz escalonada reducida)**.** *Una matriz es una **matriz escalonada** si el elemento principal de cada fila está más a la izquierda que el elemento principal de la fila inmediatamente inferior. Una* matriz escalonada reducida *es una matriz escalonada cuyos elementos principales son 1, y todos los elementos que están por encima de estos unos principales son 0.*

Ejemplo 1.10.

$$\underset{\text{Matriz escalonada}}{\begin{bmatrix} 0 & \mu_1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \mu_2 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \underset{\text{Matriz escalonada reducida}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Teorema 1.11 (Unicidad de la forma escalonada reducida)**.** *Toda matriz es equivalente a una y sólo una matriz escalonada reducida.*

La demostración de este resultado se simplifica si conocemos más detalles sobre la reducción por filas y la estructura de la matriz escalonada. Estos detalles se discutirán en el Capítulo 3, por lo que damos la demostración en un apéndice al final de estas notas.

BORRADOR

Definición 1.12. *Una **posición pivote** es una posición de una matriz que corresponde a un elemento principal de la matriz escalonada reducida asociada. Una **columna pivote** es aquella que contiene una posición pivote. Ambos objetos están únicamente determinados para cada matriz.*

Ejemplo 1.13. Para encontrar la forma escalonada reducida de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

utilizando ordenadamente operaciones elementales de filas, vamos eligiendo los **pivotes**, elementos distintos de cero que colocamos en las posiciones pivote para ir anulando los elementos apropiados y alcanzar la forma escalonada (ver siguiente párrafo).

Algoritmo de reducción por filas. El algoritmo utilizado en el ejemplo anterior se puede usar para encontrar la matriz escalonada reducida de cualquier matriz. Es el siguiente.

1. Elegir la columna distinta de cero que se encuentre más a la izquierda de la matriz. Es una columna pivote y su posición más alta una posición pivote.
2. Elegir un elemento no nulo en la columna pivote anterior, y permutar las filas para que ese elemento se sitúe en la posición pivote. Ese elemento no nulo se denomina **pivote**.
3. Sumar la fila que contiene el pivote (la primera), multiplicada por constantes apropiadas, a todas las filas que se encuentran debajo, para anular todos los elementos debajo del pivote.
4. Repetir el procedimiento anterior sobre la submatriz formada al eliminar tanto la fila como la columna que contienen al pivote (es decir, al eliminar la primera fila y la primera columna)
5. Considerar ahora el pivote situado más a la derecha y abajo. Hacer este pivote 1 multiplicando su fila por 1/valor del pivote. Utilizar este pivote unitario para hacer cero todos los elementos que se encuentran encima suyo, sumando la fila del pivote multiplicada por constantes apropiadas. Procediendo de este modo con todos los pivotes, de abajo a arriba y de derecha a izquierda, se obtiene la matriz reducida.

BORRADOR

Ejemplo 1.14.

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución general de un sistema lineal. El algoritmo de reducción por filas proporciona un procedimiento sistemático para resolver un sistema lineal y caracterizar su conjunto solución. Comencemos por un ejemplo.

Ejemplo 1.15. El sistema

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} & & 3x_2 & - & 6x_3 & + & 6x_4 & + & 4x_5 & = & -5 \\ 3x_1 & - & 7x_2 & + & 8x_3 & - & 5x_4 & + & 8x_5 & = & 9 \\ 3x_1 & - & 9x_2 & + & 12x_3 & - & 9x_4 & + & 6x_5 & = & 15 \end{array}$$

posee como matriz ampliada escalonada reducida la calculada en el ejemplo 1.14:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

El sistema escalonado reducido asociado es

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & - & 2x_3 & + & 3x_4 & & & = & -24 \\ & & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & & & = & -7 \\ & & & & & & & + & x_5 & = & 4 \end{array}$$

En este ejemplo se observa cómo hay más variables incógnitas que ecuaciones, así que debemos escribir un conjunto de variables en función de otras cuyo valor no esté restringido por ninguna ecuación. Por ejemplo, podemos escribir que las solucionesn son

$$\begin{cases} x_1 = -24 + 2x_3 - 3x_4 \\ x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4 \\ x_3 \text{ libre} \\ x_4 \text{ libre} \\ x_5 = 4 \end{cases}$$

Tomaremos como elección estándar de variables libres y variables "dependientes" (o básicas) la realizada en el ejemplo anterior. Es decir, si el sistema es

BORRADOR

compatible, las **variables básicas** (o principales) son aquellas que corresponden a una columna pivote de la matriz aumentada en forma escalonada reducida, y las **variables libres** (o paramétricas) las que corresponden a columnas no pivote. Esta forma de escribir las soluciones se denomina **solución general en forma paramétrica** o, coloquialmente, solución en forma paramétrica.

Ejemplo 1.16. Encontrad la solución general de

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

por dos procedimientos: i) sustitución regresiva y ii) obteniendo primero la matriz reducida.

Solución:

$$\begin{cases} x_1 = -6x_2 - 3x_4 \\ x_2 \text{ libre} \\ x_3 = 5 + 4x_4 \\ x_4 \text{ libre} \\ x_5 = 7 \end{cases}$$

Teorema 1.17 (Existencia y unicidad)**.** *Un sistema lineal es consistente si y sólo si la última columna (la de más a la derecha) de la matriz aumentada* no *es una columna pivote, es decir si la forma escalonada de la matriz aumentada no tiene una fila de la forma*

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \end{bmatrix} \qquad b \neq 0.$$

Si el sistema es consistente, entonces tiene una única solución si no existe ninguna variable libre, y tiene infinitas soluciones si existe alguna variable libre.

Observación: hemos aludido a la forma escalonada *no reducida* del sistema, aunque hay muchas. Nos referimos a cualquier forma escalonada, que al tener la estructura de pivotes igual a la de la forma reducida (que es única) ya permite determinar la consistencia y encontrar las variables básicas y libres. Sin embargo, para resolver el sistema asociado a una matriz no reducida necesitaremos utilizar la sustitución regresiva. En vez de ello, el procedimiento recomendado para cálculos manuales es continuar la reducción por líneas hasta obtener la matriz escalonada reducida, de la cual se deduce la solución en forma paramétrica de modo inmediato.

BORRADOR

Resumiendo, el procedimiento para describir de forma paramétrica las soluciones de un sistema lineal es el siguiente.

1. Reducir la matriz aumentada del sistema a forma escalonada.
2. Si el sistema no es consistente, no hay solución: fin del problema.
3. Obtener la forma escalonada reducida.
4. Escribir el sistema asociado a la matriz escalonada reducida.
5. Dar en forma paramétrica la solución, escribiendo las variables básicas en función de las libres usando la forma escalonada reducida anterior.

1.3. Ecuaciones vectoriales

Vectores. Una matriz de una sola columna (es decir, de dimensiones $n \times 1$) se denomina *vector columna*, y vamos a identificar los vectores de n componentes con estas matrices de una sola columna. La notación habitual para, por ejemplo, un vector de dos componentes, es $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ pero en realidad se trata de una abreviatura para tratar con el vector columna correspondiente

$$(v_1, v_2) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}.$$

El conjunto de todos los vectores de dos componentes reales se denota por $\mathbf{R}^2$, y en él se pueden definir varias operaciones estándar: la **multiplicación por un escalar*** de un vector

$$\alpha \in \mathbf{R},\ \mathbf{v} \in \mathbf{R}^2 \ \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{v} = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

y la suma

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Interpretación geométrica y dos interpretaciones de la suma. $\mathbf{R}^3$ y $\mathbf{R}^n$.

*escalar es el nombre dado en teoría vectorial a un número

BORRADOR

Proposición 1.18. *Propiedades algebraicas de* $\mathbf{R}^n$.

Para todos los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$ *y todos los escalares* $c, d \in \mathbf{R}$*:*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$
5. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
6. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
7. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
8. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Combinaciones lineales.

Definición 1.19 (Combinación lineal)**.** *Una combinación lineal de los vectores* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *es un vector formado con la operación*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_p$ *son escalares cualesquiera.*

Ejemplo 1.20. Sean

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Determinar si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$.

Solución: Planteamos la ecuación vectorial

$$\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2$$

siendo x_1 y x_2 incógnitas, los coeficientes de una posible combinación lineal. Esta ecuación es un sistema cuya solución es

$$\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

La **ecuación vectorial**

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b} \tag{1.10}$$

equivale al sistema lineal de matriz aumentada

$$\left[\, \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_p \mid \mathbf{b} \,\right]$$

Si el sistema lineal anterior tiene solución, el vector $\mathbf{b}$ es combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$.

BORRADOR

Definición 1.21. *El espacio generado por los vectores* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,..., $\mathbf{v}_p$ *es el conjunto, denominado* Gen$\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$, *de todos los vectores que son combinaciónes lineales de la forma*

$$\text{Gen}\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\} = \left\{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p\right\}$$

siendo $c_1,...,c_n \in \mathbf{R}^n$.

El vector $\mathbf{b}$ está en Gen$\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ si el sistema de ecuaciones (1.10) tiene solución. El conjunto $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$ se denomina **conjunto** (**o sistema**) **de generadores** de Gen$\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_p\}$.

Ejemplo 1.22. El conjunto Gen$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\5\end{bmatrix}\right\}$ es el plano de $\mathbf{R}^3$ que pasa por el origen y contiene a ambos vectores. En la figura 1.3 se representa este conjunto.

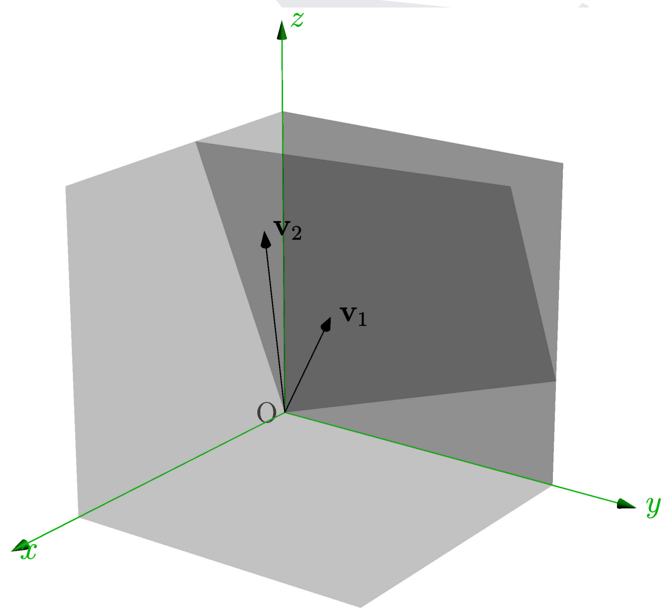

Figura 1.3: Interpretacion geométrica de Gen$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$, con $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)$, $\mathbf{v}_2 = (2,1,5)$.

1.4. La ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

La notación matricial permite escribir sistemas lineales de forma muy concisa, y visualizar su estructura de un modo eficiente. Por ejemplo, podemos considerar una matriz $m\times n$ como un sistema de n vectores columna de m componentes:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \left[\, \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n \,\right] \tag{1.11}$$

y definir el producto de una matriz por un vector como la combinación lineal de las columnas de la matriz con los pesos dados por el vector.

Definición 1.23. *El producto de una matriz A de dimensiones $m \times n$ por un vector $\mathbf{x}$ de n componentes se define como el vector combinación lineal de las columnas*

$$A\mathbf{x} = \left[\, \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n \,\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m.$$

La definición de este producto permite escribir de forma muy concisa un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, en concreto, como una **ecuación matricial**.

Teorema 1.24. *Sea A una matriz $m \times n$ con columnas $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ y $\mathbf{b}$ un vector de $\mathbf{R}^m$. La ecuación matricial*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

tiene la misma solución que la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

que sabemos equivale a su vez al sistema lineal de matriz aumentada

$$\left[\, \mathbf{a}_1 \mid \mathbf{a}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n \mid \mathbf{b} \,\right].$$

Como hemos visto, hay tres formas de ver un sistema de ecuaciones lineales: como un sistema de ecuaciones sobre las variables escalares incógnitas, como una ecuación vectorial sobre vectores columna, y como una ecuacion matricial.

Existencia de soluciones de la ecuación matricial. El procedimiento de resolución de un sistema de ecuaciones que utilizamos, independientemete de si observamos este sistema como vectorial, matricial o escalar, es siempre la reducción por filas. De todos modos, las distintas interpretaciones conducen a diversos resultados interesantes, como el siguiente.

Ejemplo 1.25. Si

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

¿ cuándo es $\mathbf{b}$ combinación lineal de los vectores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{a}_3$?

El problema es literalmente saber cuándo la ecuación vectorial o matricial

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

tiene solución, es decir, es equivalente a estudiar el problema: ¿ es el sistema matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consistente para todos los vectores $\mathbf{b}$? con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Reduciendo la matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ -4 & 2 & -6 & b_2 \\ -3 & -2 & -7 & b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & 4b_1 + b_2 \\ 0 & 7 & 5 & 3b_1 + b_3 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & b_1 \\ 0 & 14 & 10 & 4b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 \end{bmatrix}$$

se observa que sólo cuando $b_1 - \frac{1}{2}b_2 + b_3 = 0$, el sistema tiene solución. El problema ha sido que las columnas de A *no generan* todo $\mathbf{R}^3$, sino sólo un plano, cuya ecuación implícita es precisamente $x - \frac{1}{2}y + z = 0$.

Proposición 1.26. *La ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución si y sólo si $\mathbf{b}$ es una combinación lineal de las columnas de A.*

La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ del ejemplo anterior no siempre es consistente, porque la forma escalonada de A (sólo la matriz, no la matriz aumentada) tiene una fila de ceros al final, es decir, no tiene un pivote en la tercera fila. Si una matriz A tiene pivotes en todas sus filas, la matriz aumentada no puede tener una fila como la del teorema 1.17, y el sistema siempre será consistente. Para cualquier $\mathbf{b}$ de $\mathbf{R}^m$ hay solución, y se dice que las columnas de A *generan* $\mathbf{R}^m$.

Teorema 1.27 (Teorema S)**.**
Sea A una matriz $m \times n$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. *Para todo $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución.*

BORRADOR

2. *Todos los vectores* $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ *son combinación lineal de las columnas de A.*

3. *Las columnas de A generan* $\mathbf{R}^m$.

4. *Hay una posición pivote en cada fila de A.*

Cálculo del producto Ax. Hemos definido el producto de una matriz A de $m\times n$ por un vector columna $\mathbf{x}$ de $n \times 1$ como la combinación lineal de las columnas de A con los coeficientes dados por los correspondientes elementos de $\mathbf{x}$. Este procedimiento se denomina multiplicación de matrices *por columnas*. Hay una manera equivalente de organizar la multiplicación, mediante lo que podemos llamar *regla fila-columna*. Obsérvese cómo es el producto de una matriz de $1 \times n$ (denominada **vector fila**) por un un vector columna. Considerando que el vector fila es una matriz cuyas columnas tienen un sólo elemento, la definición 1.23 implica que

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

Más adelante veremos que esta expresión es el *producto escalar* del vector fila por el vector columna. Es cierta entonces la siguiente proposición.

Proposición 1.28. *El producto A*$\mathbf{x}$ *es igual al vector columna en el que el elemento i-ésimo es el producto escalar de la fila i de A por el vector columna* $\mathbf{x}$.

Ejemplo 1.29. El producto calculado por columnas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 \end{bmatrix}$$

se puede calcular también por filas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & -3 \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ -1 & 5 & -3 \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 6 & -2 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \\ 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 \\ 6x_1 - 2x_2 + 8x_3 \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

Propiedades del producto Ax.

Teorema 1.30 (Linealidad respecto a $\mathbf{x}$). *Sean A una matriz $m \times n$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ vectores de $\mathbf{R}^n$ y c un escalar. Entonces*

1. $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}$.
2. $A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x})$.

1.5. Conjuntos solución de sistemas lineales

Hemos escrito, en párrafos anteriores, los sistemas de ecuaciones lineales en forma vectorial y en forma matricial. En este párrafo se persigue escribir los conjuntos solución de los sistemas en forma vectorial. Ello permitirá, más adelante, una interpretación algebraica y geométrica más clara de su estructura.

Sistemas lineales homogéneos. Un sistema lineal **homogéneo** es aquel que se puede escribir de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, siendo A una matriz de $m \times n$, $\mathbf{x}$ un vector columna de n componentes, y $\mathbf{0}$ el vector de m componentes nulas. La **solución trivial** es $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que cualquier sistema homogéneo posee.

Ejemplo 1.31. Estudiar las soluciones, si las tiene, del sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 6x_1 + x_2 - 8x_3 &= 0 \end{aligned}$$

BORRADOR

La matriz aumentada[*] es equivalente a la matriz escalonada

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo que el sistema tiene una variable libre, x_3, y por lo tanto, soluciones no triviales. La matriz escalonada reducida es[†]

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que la solución en forma paramétrica es

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{3}x_3 \\ x_2 = 0 \\ x_3 \text{ libre} \end{cases}$$

Proposición 1.32. *Existen soluciones no triviales de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ si y sólo si la ecuación tiene al menos una variable libre.*

Es decir, si todas las columnas de A tienen pivote, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ no tiene soluciones no triviales, ya que no hay variables libres.

Es interesante escribir la solución del ejercicio anterior en forma vectorial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3}x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Una solución así escrita se dice que está en **forma paramétrica vectorial**. Es decir, la solución es una combinación lineal de vectores $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$, siendo los c_i varables libres o escalares. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 1.33. El sistema lineal compuesto de una sola ecuación con tres variables

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

se puede resolver directamente: las variables x_2 y x_3 son libres y x_1 es la variable principal. Por tanto

$$x_1 = \tfrac{3}{10}x_2 + \tfrac{1}{5}x_3, \quad x_2 \text{ libre}, \quad x_3 \text{ libre}$$

---

[*] en sistemas homogéneos no escribimos la última columna, ya que es siempre el vector cero.

[†] casi no hace falta calcular para pasar de la matriz escalonada a la reducida.

BORRADOR

y en forma paramétrica vectorial

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 3/10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 2/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De nuevo vemos que la solución general de un sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ en forma vectorial paramétrica tiene la forma

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p$$

donde todos los coeficientes c_i son variables libres, y pueden tomar cualquier valor. Es decir, $\mathbf{x} \in \mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ y el conjunto solución de un sistema lineal homogéneo es lo que más adelante denominaremos un subespacio lineal. Por ejemplo, si $p = 1$ se trata de una recta que pasa por el origen, y si $p = 2$ de un plano que contiene al origen.

Sistemas lineales no homogéneos.

Ejemplo 1.34. Describamos todas las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ dada por

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Reduciendo igual que en ejemplo 1.31

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

con lo que la solución en forma paramétrica es $x_1 = -1 + \frac{4}{3}x_3$, $x_2 = 2$ y x_3 libre. En forma vectorial

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 + \frac{4}{3}x_3 \\ 2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$$

Teorema 1.35. *La solución general de un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, si existe, se puede dar en forma vectorial paramétrica*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h \tag{1.13}$$

donde $\mathbf{p}$ es una solución particular *del sistema, y $\mathbf{v}_h$ representa todas las soluciones $\mathbf{v}_h = \mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p$ del sistema homogéneo correspondiente $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.*

BORRADOR

Demostración. Sea $\mathbf{x}$ cualquier solución del sistema, y $\mathbf{p}$ una solución particular; entonces $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$. La diferencia entre cualquier solución y la particular, $\mathbf{x} - \mathbf{p}$, es obligatoriamante solución de la ecuación homogénea porque

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{p}) = A\mathbf{x} - A\mathbf{p} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Luego $\mathbf{x} - \mathbf{p} = \mathbf{v}_h$ siendo $\mathbf{v}_h$ alguna solución de la homogénea y efectivamente $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$. Y, además, la suma de cualquier solución de la homogénea $\mathbf{v}_h$ a una solución conocida $\mathbf{p}$ del sistema, es solución, porque

$$A(\mathbf{p} + \mathbf{v}_h) = A\mathbf{p} + A\mathbf{v}_h = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

luego el teorema queda demostrado. □

La diferencia de la solución del caso inhomogéneo con el caso homogéneo es que aparece un vector numérico $\mathbf{p}$ no multiplicado por una variable libre. La interpretación geométrica de los espacios solución de un sistema no homogéneo es la del mismo objeto que la solución de la homogénea, pero que no pasa por el origen, estando desplazado respecto a éste por un vector $\mathbf{p}$. Si hay una variable libre, es una recta que no pasa por el origen, o un plano si hay dos, etc. Observemos que la fórmula (1.13) se denomina, en la geometría elemental de bachillerato, la ecuación paramétrica vectorial de una recta o de un plano, en los casos de un vector $p = 1$ o dos vectores $p = 2$ generadores.

Para escribir en forma vectorial paramétrica el conjunto de soluciones de un sistema lineal se aplica, como acabamos de ver, el siguiente algoritmo.

1. Encontrar la solución en forma paramétrica, como en los párrafos anteriores.
2. Escribir la solución $\mathbf{x}$ en forma de vector columna.
3. Descomponer la solución anterior en combinación lineal de vectores, siendo los coeficientes las variables libres de la solución.

Ejercicio 1.36. Demostrad que si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene solución, y no hay variables libres, la solución es única.

BORRADOR

1.6. Independecia lineal

Consideremos un sistema lineal homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ como una ecuación vectorial

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}.$$

Definición 1.37. *Un conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es* ***linealmente independiente*** *si la única combinación lineal posible de esos vectores que es nula*

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

es aquella con coeficientes c_1, c_2,..., c_p nulos:

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_p = 0.$$

En caso contrario, es decir, cuando la ecuación vectorial

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \tag{1.14}$$

admite soluciones no triviales, el conjunto de vectores se dice ***linealmente dependiente****.*

Para determinar si un conjunto de vectores es linealmente independiente o dependiente, basta entonces averiguar si el sistema (1.14) admite soluciones no triviales.

Proposición 1.38 (Parte del Teorema I)**.** *Las columnas de A forman un conjunto linealmente dependiente si y solo si el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene solución no trivial.*

Observación: esta proposición y la proposición 1.32 implican que un criterio práctico para saber si un conjunto de vectores es linealmente independiente es comprobar que la matriz formada por esos vectores columna tiene pivotes en todas sus columnas. En ese caso, no hay soluciones no triviales del sistema homogéneo asociado porque no hay variables libres.

Ejemplo 1.39. Veamos si el conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ con

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es linealmente independiente. Para ello se plantea la ecuación

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = 0 \tag{1.15}$$

BORRADOR

de matriz asociada

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 0\\ 3 & 5 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 5 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Observad que podemos, al resolver un sistema homogéneo, prescindir de la última columna de la matriz ampliada, ya que siempre es nula. La matriz escalonada basta para ver que el sistema es compatible, y que hay soluciones no triviales ya que x_3 es una variable libre. Por tanto, el conjunto de vectores *no* es linealmente independiente, sino dependiente. Para averiguar qué combinaciones lineales son nulas, resolvemos el sistema encontrando la matriz escalonada reducida

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

e introducimos la solución $x_1 = -2x_3$, $x_2 = x_3$, (x_3 libre) en la ecuación vectorial (1.15)

$$-2x_3\mathbf{v}_1 + x_3\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Cualquier valor de x_3 da una combinación lineal nula, o **relación de dependencia** entre los tres vectores. Por ejemplo, con $x_3 = -1$ tenemos que $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. La figura 1.4 aclara la interpretación geométrica de esta relación de dependencia: los tres vectores se encuentran en un mismo plano.

Proposición 1.40.

- *Cualquier conjunto que incluya al vector* $\mathbf{0}$ *es linealmente dependiente.*
- *Un conjunto de un solo vector (distinto de* $\mathbf{0}$ *) es linealmente independiente.*
- *Un conjunto de dos vectores no nulos es linealmente dependiente si y sólo si uno de los vectores es múltiplo del otro.*

Ejercicio 1.41. Demostrad la proposición anterior.

Teorema 1.42. *Un conjunto* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si alguno de los vectores se puede poner como combinación lineal de los demás.*

Demostración. Si $\mathbf{v}_j = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + c_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$ entonces $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + (-1)c_j\mathbf{v}_j + c_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + \mathbf{v}_p = 0$. Viceversa, si hay una combinación lineal

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + c_j\mathbf{v}_j + c_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \cdots + c_p\mathbf{v}_p = 0$$

BORRADOR

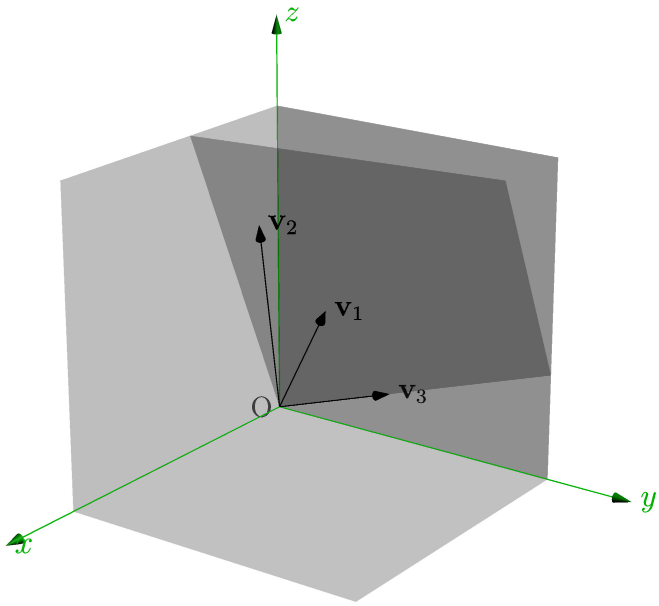

Figura 1.4: Relación de dependencia.

con $c_j \neq 0$ (al menos un c_j debe ser distinto de cero) entonces

$$\mathbf{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\mathbf{v}_{j-1} - \frac{c_{j+1}}{c_j}\mathbf{v}_{j+1} - \cdots - \frac{c_p}{c_j}\mathbf{v}_p$$

□

Nota: no todos los vectores de un conjunto linealmente dependiente pueden ponerse como combinación lineal de los restantes.

Teorema 1.43. *Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ es un conjunto de p vectores pertenecientes a $\mathbf{R}^n$ (con n componentes) y hay más vectores que componentes ($p > n$) entonces el conjunto es linealmente dependiente.*

Demostración. En el sistema homogéneo lineal (1.14) correspondiente hay más incógnitas que ecuaciones. Por tanto, hay variables libres y hay soluciones no triviales. □

Terminamos el capítulo enunciando un teorema que resume algunas propiedades de la independencia lineal en relación a los sistemas homogéneos.

Teorema 1.44 (Teorema I)**.** *Sea A de $m \times n$. Las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *La única solución de la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es la trivial.*

2. *La única combinación lineal tal que* $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ *(* $\mathbf{a}_i$ *son las columnas de* A *) es la trivial.*

3. *Las columnas de* A *son linealmente independientes.*

4. *Hay una posición pivote en cada columna de* A*.*

El teorema I, aunque trata sobre el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tiene una consecuencia sobre el sistema no homogéneo, ya que trata sobre la unicidad (determinación) de los sistemas.

Teorema 1.45. *Si* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *tiene solución única, entonces la solución de* $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$*, si existe, es única.*

Ejercicio 1.46. Usad el ejercicio 1.36 para demostrar el teorema 1.45.

BORRADOR

1.7. Respuestas a los ejercicios

1.7 Una solución de un sistema es solución del sistema resultante de aplicar una o.e.f. sobre el primer sistema. Por tanto, el conjunto solución, después de aplicar una o.e.f., puede mantenerse igual o aumentar. Pero si aumentara, al aplicar la o.e.f. inversa obtendríamos que el sistema original tiene más soluciones que las que tenía antes de realizar sobre él las dos operaciones elementales inversas. Esto es absurdo, por lo que las operaciones elementales no varían el conjunto solución.

1.36 Si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son dos soluciones, entonces $\mathbf{q}-\mathbf{p}$ tiene que ser una solución de la ecuación homogénea. Pero la única solución de la homogénea es $\mathbf{0}$, luego $\mathbf{q}-\mathbf{p}=\mathbf{0}$ $\Rightarrow \mathbf{q}=\mathbf{p}$.

1.46 Como no hay variables libres, la solución, si existe, es única.

BORRADOR

1.8. Resumen

Teorema (Unicidad de la forma escalonada). *Toda matriz es equivalente a una y sólo una matriz escalonada reducida.*

Teorema (Existencia y unicidad). *Un sistema lineal es consistente si y sólo si una forma escalonada equivalente a la matriz aumentada no tiene una fila de la forma*

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \end{bmatrix} \qquad b \neq 0$$

Si el sistema es consistente, entonces tiene una única solución si no existe ninguna variable libre, y tiene infinitas soluciones si existe alguna variable libre.

Definición. *Una combinación lineal de los vectores* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *es un vector formado con la operación*

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

donde c_1, $c_2, \ldots, c_p$ *son escalares cualesquiera.*

Definición. *El espacio generado por los vectores* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$*:*

$$\mathrm{Gen}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\} = \left\{c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p\right\}$$

Proposición. *La ecuación matricial* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tiene solución si y sólo si* $\mathbf{b}$ *es una combinación lineal de las columnas de* A.

Proposición. *Existen soluciones no triviales de* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *si y sólo si hay relaciones de dependencia entre las columnas de* A *(hay variables libres)*

Teorema (S). *Sea* A *de* $m \times n$. *Las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *Para todo* $\mathbf{b}$ *la ecuación* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *tiene solución.*
2. *Todos los vectores* $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ *son combinaciones lineales de las columnas de* A.
3. *Las columnas de* A *generan* $\mathbf{R}^m$.
4. *Hay una posición pivote en cada fila de* A.

Teorema (I). *Sea* A *de* $m \times n$. *Las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *La única solución de la ecuación* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *es la trivial.*
2. *La única combinación lineal tal que* $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ *es la trivial (* $\mathbf{a}_i$ *columnas de* A *)*
3. *Las columnas de* A *son linealmente independientes.*
4. *Hay una posición pivote en cada columna de* A.

Teorema. *La solución de un sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *si existe, se puede dar en forma vectorial paramétrica*

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$$

donde $\mathbf{p}$ *es una* solución particular *y* $\mathbf{v}_h = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p$ *son las soluciones del sistema homogéneo correspondiente* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

BORRADOR

BORRADOR