

Capítulo 5

Determinantes

5.1. Introducción a los determinantes

Recordemos la definición del determinante de una matriz A de 2×2 (fórmula 2.4)

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

La proposición 2.16 implica que el determinante es una función de los elementos de la matriz, que se anula si y solo si esta matriz es singular. Vamos a encontrar una función análoga para matrices cuadradas de cualquier tamaño. Es decir, el determinante de una matriz cuadrada es una función de los elementos de la matriz, que es nula cuando esta es singular y no nula cuando no es singular.

Ejemplo 5.1. Reduzcamos una matriz general de 3×3

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Supongamos que $a \neq 0$. Entonces, usándolo como pivote

$$A \sim \begin{bmatrix} a & b & c \\ ad & ae & af \\ ag & ah & ai \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & ae - bd & af - cd \\ 0 & ah - bg & ai - cg \end{bmatrix}$$

y suponiendo ahora que $ae - bd \neq 0$

$$A \sim \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & ae - bd & af - cd \\ 0 & (ae - bd)(ah - bg) & (ae - bd)(ai - cg) \end{bmatrix} \\ \sim \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & ae - bd & af - cd \\ 0 & 0 & (ae - bd)(ai - cg) - (ah - bg)(af - cd) \end{bmatrix}$$

La matriz será singular, bajo las suposiciones realizadas, si y sólo si el último elemento es nulo

$$0 = (ae - bd)(ai - cg) - (ah - bg)(af - cd) \\ = a^2ei - aecg - bdai + bdgc - a^2hf + ahcd + bgaf - bgcd \\ = a(aei - ecg - bdi - ahf + hcd + bgf)$$

Es decir, podemos tomar como determinante (al menos si $a \neq 0$ y $ae - bd \neq 0$)

$$\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = aei + bfg + dhc - ceg - bdi - ahf$$

Definición 5.2. Con $n \geq 2$, el **determinante** de una matriz A cuadrada de $n \times n$ se define recursivamente como

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n} \\ = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} \quad (5.1)$$

donde* A_{ij} es la submatriz de A que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A .

Ejercicio 5.3. Calcúlese

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

*ésta es la primera vez que utilizamos la notación de **sumatorios**, que aparece profusamente en en álgebra lineal

Se define el *cofactor* (i, j) de A como el número

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

para escribir la definición (5.1) del determinante como

$$\det A = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + \cdots + a_{1n}C_{1n}.$$

La fórmula anterior se denomina *desarrollo de $\det A$ a lo largo de la primera fila*. Se puede demostrar el siguiente resultado.

Teorema 5.4. *El determinante de una matriz A de $n \times n$ se puede calcular desarrollando por cofactores a lo largo de una fila i cualquiera*

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

o a lo largo de una columna j

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}.$$

Ejercicio 5.5. Calcúlese, desarrollando por la segunda fila y la segunda columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = .$$

Ejemplo 5.6. Calcular

$$\begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Teorema 5.7. *El determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.*

5.2. Propiedades de los determinantes

Teorema 5.8 (Operaciones de fila y determinantes). *Sea A una matriz cuadrada.*

1. Si $B = L_{i,j}(\alpha)A$ entonces $\det B = \det A$.

2. Si $B = P_{i,j}A$ entonces $\det B = -\det A$.
3. Si $B = L_i(\alpha)A$ entonces $\det B = \alpha \det A$.

El siguiente teorema permite utilizar **operaciones de columna** para calcular determinantes:

Teorema 5.9. Si A es una matriz $n \times n$ entonces $\det A^T = \det A$.

Ejemplo 5.10.

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 6 & 8 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & -9 & 5 & 10 \\ -3 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & -12 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\ = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-6) \cdot (-1) = 36$$

Utilicemos la reducción por filas de A a una matriz escalonada U para encontrar propiedades adicionales del determinante. Si A es $n \times n$, entonces U es $n \times n$ y se puede formar realizando permutaciones y operaciones $L_{i,j}(\alpha)$ sobre A (las $L_i(\alpha)$ no son realmente necesarias). Según el teorema 5.5 cada vez que realizamos una operación $L_{i,j}(\alpha)$ no varía el determinante, y cada vez que realizamos una permutación, el determinante cambia de signo. Por tanto, el determinante de U será

$$\det U = (-1)^p \det A$$

si hemos realizado p permutaciones $P_{i,j}$ al construir U . Si A es invertible, por el teorema 2.27 posee n pivotes no nulos. La única posibilidad para colocar n pivotes en una matriz escalonada $n \times n$ U es situarlos en la diagonal principal. Por tanto, U es triangular superior, y su determinante es el producto de los pivotes de A .

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r \cdot (\text{producto de los pivotes de } A) & \text{si } A \text{ es invertible} \\ 0 & \text{si } A \text{ no es invertible} \end{cases}$$

Teorema 5.11. (último apartado teorema matriz invertible) Una matriz A (cuadrada) es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.

Del teorema de la matriz invertible 2.27 se deduce también que si $\det A \neq 0$, entonces las columnas de A son un conjunto linealmente independiente, y

viceversa, $\det A = 0$ si y sólo si las columnas de A son un conjunto linealmente dependiente. Lo mismo podemos decir, por el teorema 5.9, sobre las filas de A .

Ejemplo 5.12.

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & -6 \\ -6 & 7 & -7 & 4 \\ -5 & -8 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

($L_{3,1}(2)$ y salen dos filas iguales).

Determinante del producto de matrices.

Teorema 5.13. Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $\det AB = (\det A)(\det B)$.

Proposición 5.14. Si A es invertible, el determinante de su inversa es:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Demostración.

□

Propiedad multilineal del determinante. Consideremos el determinante como función de los vectores columna de la matriz correspondiente. Tomemos como variable de la función una columna $\mathbf{x}$, por ejemplo, la i -ésima, fijando los valores de las demás columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ (menos la i):

$$T(\mathbf{x}) = \det \left[\mathbf{a}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{a}_{i-1} \mid \mathbf{x} \mid \mathbf{a}_{i+1} \mid \cdots \mid \mathbf{a}_n \right].$$

Entonces T es una aplicación lineal, es decir:

$$T(c\mathbf{x}) = c T(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$$

como se comprueba desarrollando el determinante por la columna i , correspondiente a $\mathbf{x}$.

5.3. Regla de Cramer, volumen y transformaciones

Teorema 5.15 (Regla de Cramer). Sea A $n \times n$ e invertible. La solución única $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ del sistema de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede escribir explícitamente como

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\det A_i(\mathbf{b})}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n.$$

donde la matriz $A_i(\mathbf{b})$ es la matriz A con la columna i substituida por $\mathbf{b}$.

Demostración. □

Ejemplo 5.16. Resuélvase el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3sx_1 - 2x_2 &= 4 \\ -6x_1 + sx_2 &= 1 \end{aligned}$$

Teorema 5.17 (Fórmula para la inversa). Si A es una matriz de $n \times n$ invertible entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$$

donde $\operatorname{adj} A$ es la matriz adjunta de A , que se define por

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

siendo C_{ij} los cofactores*.

Ejemplo 5.18. Encuéntrese el inverso de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$.

*obsérvese que están en las posiciones transpuestas, es decir, C_{ij} está en la posición (j, i) de la matriz adjunta.

Determinantes y volúmenes.

Teorema 5.19. Si A es una matriz 2×2 , el valor absoluto del determinante $|\det A|$ es el área del paralelogramo formado por los vectores columna de A . Si A es de 3×3 , $|\det A|$ es el volumen del paralelepípedo formado por los vectores columna.

El determinante de la matriz asociada a una transformación matricial también tiene un significado geométrico.

Teorema 5.20. Sea $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ una aplicación matricial con matriz asociada A . Entonces, si S es un paralelogramo en $\mathbf{R}^2$,

$$\text{área de } T(S) = |\det A| \cdot (\text{área de } S). \quad (5.2)$$

Sea $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una aplicación matricial con matriz asociada A . Entonces, si S es un paralelepípedo en $\mathbf{R}^3$,

$$\text{volumen de } T(S) = |\det A| \cdot (\text{volumen de } S).$$

Ejemplo 5.21. Considérese la transformación matricial $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ con $A =$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

5.4. Respuestas a los ejercicios

5.5. Resumen

Definición. Si $n \geq 2$, y A de $n \times n$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \det A_{1j} \end{aligned}$$

donde A_{ij} es la submatriz de A que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de A .

Proposición. Si $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ es el cofactor

$$\det A = a_{11} C_{11} + a_{12} C_{12} + \cdots + a_{1n} C_{1n}$$

Teorema. Desarrollo por cofactores a lo largo de una fila i cualquiera

$$\det A = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in}$$

o a lo largo de una columna j

$$\det A = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}.$$

Teorema (Operaciones de fila y determinantes). Sea A una matriz cuadrada:

1. $\det L_{i,j}(\alpha)A = \det A$.
2. $\det P_{i,j}A = -\det A$.
3. $\det L_i(\alpha)A = \alpha \det A$.

Proposición.

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r \cdot \left(\begin{smallmatrix} \text{producto de los} \\ \text{pivotes de } A \end{smallmatrix} \right) & \text{si } A \text{ es invertible} \\ 0 & \text{si } A \text{ no es invertible} \end{cases}$$

Teorema. Una matriz A es invertible si y sólo si $\det A \neq 0$.

Teorema. Si A y B son matrices $n \times n$, entonces $\det AB = (\det A)(\det B)$.

Teorema. $\det A^T = \det A$.

Proposición. Si A es invertible:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & a\mathbf{x} + b\mathbf{y} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \\ = a \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{x} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \\ + b \det \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_{i-1} & \mathbf{y} & \mathbf{a}_{i+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema. Sea $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ una aplicación matricial con matriz asociada A . Entonces, si S es un paralelogramo en $\mathbf{R}^2$,

$$\text{área de } T(S) = |\det A| \cdot (\text{área de } S).$$

Teorema. Sea $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una aplicación matricial con matriz asociada A . Entonces, si S es un paralelepípedo en $\mathbf{R}^3$,

$$\text{volumen de } T(S) = |\det A| \cdot (\text{volumen de } S).$$