# Capítulo 6

# Valores propios y vectores propios

En este capítulo investigaremos qué propiedades son *intrínsecas* a una matriz, o su aplicación lineal asociada. Como veremos, el hecho de que existen muchas bases en un espacio vectorial, hace que la expresión de las matrices o aplicaciones lineales sea relativa: depende de qué base de referencia tomamos. Sin embargo, hay elementos asociados a esta matriz, que no dependen de la o las bases de referencia que elijamos, por ejemplo: el espacio nulo y el espacio columna de la matriz, y sus respectivas dimensiones.

## 6.1. Vectores propios y valores propios

En este capítulo nos centraremos en **matrices cuadradas**, con respectivas aplicaciones matriciales que se pueden interpretar como transformaciones del espacio $\mathbf{R}^n$. La aplicación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ puede transformar un vector dado $\mathbf{x}$ en otro, de distinta dirección y longitud. Sin embargo, puede haber unos vectores muy especiales para esa transformación. Por ejemplo, el conjunto de los vectores que son transformados en cero por la aplicación, es decir, el núcleo de la aplicación o espacio nulo de $A$: $\{\mathbf{x} : \; A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. Por mucho que cambiemos de base, el espacio nulo siempre es el mismo. Otro conjunto interesante es el de los vectores que se transforman en sí mismos, $\{\mathbf{x} : \; A\mathbf{x} = \mathbf{x}\}$. Los dos conjuntos comentados están asociados a la matriz, y tienen una característica especial: la transformación los mantiene *invariantes*, es decir, los vectores transformados entán dentro de los conjuntos correspondientes. Por mucho que cambiemos de base, los conjuntos siguen siendo invariantes. dar ejemplo de conjunto no invariante: recta que se transforma en otra con cierto ángulo.

***Ejemplo 6.1.*** Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Resulta que

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{v}.$$

La aplicación ha transformado $\mathbf{v}$ sin cambiar su dirección.

Los vectores que sólo son dilatados o encogidos por una aplicación lineal, son muy especiales para ella.

**Definición 6.2.** *Un **vector propio** (o autovector) de una matriz $A$ de $n \times n$ es un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, distinto de $\mathbf{0}$, tal que para cierto escalar $\lambda \in \mathbf{R}$*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

*Un escalar $\lambda$ tal, se denomina **valor propio** (o autovalor) de $A$, es decir, $\lambda$ es valor propio de $A$ si existe una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, y a $\mathbf{x}$ se lo denomina* vector propio asociado al valor propio $\lambda$.

***Ejemplo 6.3.*** Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Compruébese si $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ son vectores propios de $A$.

2. Determínese si $\lambda = 7$ es valor propio de $A$.

**Solución:**

1.

2. Hay que determinar si la ecuación

$$A\mathbf{x} = 7\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad (A - 7I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

(que hemos escrito como un sistema homogéneo) tiene solución no trivial. Para ello se escribe

$$A - 7I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

El sistema homogéneo asociado tiene una variable libre, luego hay soluciones no triviales y 7 es un autovalor de $A$. De hecho, la solución del sistema homogéneo es $x_1 = x_2$, es decir, en forma vectorial paramétrica $\mathbf{x} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Estos infinitos vectores (menos $\mathbf{0}$) son los vectores propios asociados ala valor propio 7.

Resumiendo, si para una matriz $A$ y un escalar $\lambda$ dados hay soluciones no triviales de la ecuación homogénea

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

entonces $\lambda$ es un autovalor de $A$, y el conjunto de todas las soluciones es el conjunto de autovectores asociados a $\lambda$ (más el $\mathbf{0}$), y se denomina **espacio propio** de $A$ asociado a $\lambda$. O dicho de otro modo, el espacio propio asociado a $\lambda$ es el espacio $\mathrm{Nul}(A - \lambda I)$, si este no es nulo.

**Ejercicio 6.4.** Demuéstrese que un espacio propio es un subespacio vectorial.

**Ejercicio 6.5.** El espacio de los vectores que una matriz transforma en si mismos es un espacio propio. ¿ Cual ?

***Ejemplo 6.6.*** Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Compruébese que 2 es valor propio, y encuéntrese una base del espacio propio asociado.

**Solución:** Considerando la matriz

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

vemos que el sistema homogéneo $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene dos variables libres, y la solución general en forma paramétrica vectorial es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

con lo que el espacio propio tiene como base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

y es bidimensional. ¿ Cómo actúa la transformación matricial asociada a $A$ sobre este espacio propio ?

**Ejercicio 6.7.** El espacio propio de una matriz $A$ asociado al valor $\lambda = 0$ tiene otro nombre. ¿ Cuál ?

**Proposición 6.8.** *Si* 0 *es valor propio de una matriz $A$, si y sólo si $A$ no es invertible.*

**Teorema 6.9.** *Si* $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r$ *son vectores propios correspondientes a distintos valores propios* $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ *de una matriz* $A$ $n\times n$*, entonces el conjunto* $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_r\}$ *es linealmente independiente.*

*Demostración.* Supongamos que el conjunto de vectores es linealmente dependiente. Habrá un primer vector $\mathbf{v}_{p+1}$ que será combinación lineal de los anteriores (teorema 3.20)

$$\mathbf{v}_{p+1} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p. \tag{6.1}$$

Multiplicando por $A$

$$A\mathbf{v}_{p+1} = c_1A\mathbf{v}_1 + \cdots + c_pA\mathbf{v}_p \;\Rightarrow\; \lambda_{p+1}\mathbf{v}_{p+1} = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\lambda_p\mathbf{v}_p.$$

Restando $\lambda_{p+1}$ veces (6.1) a esta última ecuación

$$c_1(\lambda_1-\lambda_{p+1})\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p(\lambda_p-\lambda_{p+1})\mathbf{v}_p = \mathbf{0}.$$

Pero $\{\mathbf{v}_1,\ldots\mathbf{v}_p\}$ es linealmente independiente, y $\lambda_i-\lambda_{p+1}\neq 0$ si $i<p+1$, así que $c_1 = \ldots = c_p = 0$. Esto es una contradicción, y $\{\mathbf{v}_1,\ldots\mathbf{v}_r\}$ ha de ser linealmente independiente. □

**Ejercicio 6.10.** Demuéstrese que una matriz $n\times n$ no puede tener más de $n$ autovalores distintos.

## 6.2. La ecuación característica

***Ejemplo 6.11.*** Encuéntrense los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$. Solución

**Teorema 6.12** (Extensión del teorema de la matriz invertible)**.** *Sea* $A$ $n\times n$*. Entonces es equivalente a que* $A$ *sea invertible cualquiera de las siguientes afirmaciones.*

*s. El 0 no es valor propio de A.*

*t. El determinante de A no es cero.*

*Lo dicho en la sección anterior demuestra s. y el teorema 5.11 demuestra t.*

**La ecuación característica.**

**Proposición 6.13.** *Un escalar $\lambda$ es un valor propio de una matriz cuadrada $A$ si y sólo si satisface la denominada* ***ecuación característica***

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

***Ejemplo 6.14.*** Ecuación característica de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Está claro que la ecuación característica es igual a una ecuación polinómica, ya que dada una matriz numérica $A$ de $n \times n$, la expresión $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio en $\lambda$. Este polinomio, que es de grado $n$, se denomina **polinomio característico** de la matriz $A$. Claramente, sus raíces son los autovalores de $A$.

La **multiplicidad algebraica** de un autovalor $\lambda$ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico. Es decir, sabemos que un polinomio de coeficientes complejos siempre se puede factorizar en factores simples:

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)^{\mu_1}(\lambda_2 - \lambda)^{\mu_2} \cdots (\lambda_r - \lambda)^{\mu_r}.$$

Las raíces $\lambda_i$ son los autovalores, y los exponentes $\mu_i$ las multiplicidades algebraicas de los correspondientes autovalores $\lambda_i$.

**Teorema 6.15.** *Los valores propios de una matriz triangular son las entradas de su diagonal principal.*

***Ejemplo 6.16.*** El polinomio característico de una matriz es $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$.

1. ¿ qué tamaño tiene la matriz ?
2. ¿ cuáles son sus autovalores y correspondientes multiplicidades ?

**Semejanza.** El proceso de reducción por filas ha sido nuestra principal herramienta para resolver sistemas de ecuaciones. La característica fundamental de este procedimiento es, de nuevo, la *invariancia* del conjunto de soluciones, el objeto buscado, respecto a las transformaciones utilizadas para simplificar el sistema, las operaciones elementales por filas.

En el caso de que los objetos de interés sean los autovalores, existe un procedimiento que los mantiene invariantes y permite simplificar la matriz $A$.

**Definición 6.17.** *Se dice que dos matrices $A$ y $B$ de $n \times n$ son* ***semejantes*** *si existe una matriz invertible $P$ de $n \times n$ que las relaciona por la siguiente fórmula*

$$P^{-1}AP = B \quad \textit{o equivalentemente} \quad A = PBP^{-1}.$$

Realizar la operación $P^{-1}AP$ sobre $A$ se denomina realizar una **transformación de semejanza**.

**Teorema 6.18.** *Si las matrices $A$ y $B$ son semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico. Tienen, por tanto, los mismos autovalores y correspondientes multiplicidades.*

*Demostración.* Sabemos que $B = P^{-1}AP$. Por ello

$$B - \lambda I = B = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(AP - \lambda P) = P^{-1}(A - \lambda I)P.$$

Por tanto, el polinomio característico de $B$

$$\det(B - \lambda I) = \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I)$$

es el mismo que el de $A$. Obsérvese que hemos utilizado que $\det(P^{-1}) = 1/\det(P)^{*}$. □

Es importante observar que la equivalencia por filas no es lo mismo que la semejanza. La equivalencia por filas se escribe matricialmente como $B = EA$, para cierta matriz invertible $E$; la semejanza como $B = P^{-1}AP$ para cierta matriz invertible $P$.

## 6.3. Diagonalización

Una clase muy especial de matrices cuadradas son las **matrices diagonales**, aquellas cuyos elementos son todos nulos, excepto en la diagonal principal:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}.$$

Su acción sobre los vectores es muy simple.

*porque $1 = \det I = \det(P^{-1}P) = \det(P^{-1})\det(P)$

***Ejemplo 6.19.*** Sea $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Entonces

$$D\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x_1 \\ 3x_2 \end{bmatrix}.$$

Podemos pues deducir que $D^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$ y en general

$$D^k = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$$

que es la forma para la $k$-**ésima potencia** de $D$, y se extiende naturalmente a cualquier matriz diagonal.

La potencia de una matriz es muy útil en muchas aplicaciones, como veremos más adelante. De hecho, nos gustaría calcular la potencia $k$-ésima de cualquier matriz. Esto se calcula muy fácilmente si conseguimos **diagonalizar** $A$, es decir, encontrar una matriz diagonal $D$ semejante a $A$: $A = PDP^{-1}$. La razón es muy sencilla, como ilustra el siguiente ejemplo.

***Ejemplo 6.20.*** Sea $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$. Se puede comprobar que $A = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \left( \text{y } P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

Con esta información, encontremos una fórmula para la potencia $k$-ésima $A^k$ de $A$. El cuadrado $A^2$ es

$$\begin{aligned} A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) &= PD\underbrace{P^{-1}P}_{I}DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\cdot 5^2 & 5^2 \\ -3^2 & -3^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\cdot 5^2 - 3^2 & 5^2 - 3^2 \\ -2\cdot 5^2 + 2\cdot 3^2 & -5^2 + 2\cdot 3^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es fácil deducir que

$$A^k = PDP^{-1}PDP^{-1} \overset{k \text{ veces en total}}{\cdots} PDP^{-1} = PD^kP^{-1}$$

por tanto

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 5^k - 3^k & 5^k - 3^k \\ -2\cdot 5^k + 2\cdot 3^k & -5^k + 2\cdot 3^k \end{bmatrix}.$$

Una matriz es **diagonalizable** si se puede diagonalizar, es decir, si existe una matriz diagonal $D$ semejante a $A$, con lo que $A = PDP^{-1}$.

> La potencia $k$-ésima de una matriz $A$ que se puede diagonalizar $A = PDP^{-1}$ es $A^k = PD^kP^{-1}$.

**Teorema 6.21.** *Una matriz $A$ de $n \times n$ es **diagonalizable** si y sólo si tiene $n$ vectores propios linealmente independientes.*

*Se tiene que $A = PDP^{-1}$, con $D$ diagonal, si y sólo si las columnas de $P$ son vectores propios linealmente independientes de $A$, y los elementos diagonales de $D$ son los valores propios de $A$ ( en el mismo orden que los valores propios en $D$ ):*

$$A = P\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}, \quad P = \Big[\, \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n \,\Big], \quad A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} AP = A\Big[\, \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n \,\Big] &= \Big[\, A\mathbf{v}_1 \mid A\mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid A\mathbf{v}_n \,\Big] \\ &= \Big[\, \lambda_1\mathbf{v}_1 \mid \lambda_2\mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \lambda_n\mathbf{v}_n \,\Big] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} D = PD \end{aligned}$$

$$AP = PD \quad \Rightarrow \quad A = PDP^{-1}$$

porque $P$ es invertible al ser cuadrada y sus columnas ser independientes.

Viceversa, si $A = PDP^{-1}$ entonces $AP = PD$ y si $\mathbf{v}_i$ es la columna $i$ de $P$, entonces esta igualdad matricial implica que $A\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i$, es decir, las columnas de $P$ son autovectores. Al ser $P$ invertible, son linealmente independientes. □

Si una matriz no tiene $n$ vectores propios linealmente independientes, no se puede diagonalizar.

***Ejemplo 6.22.*** Diagonalicemos

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Paso 1. Encontrar los valores propios de** $A$**.** La ecuación característica es

$$\det(A-\lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda-1)(\lambda+2)^2$$

luego hay dos autovalores, $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$ (con multiplicidad 2).

**Paso 2. Encontrar los vectores propios de** $A$**.** Resolviendo los sistemas $(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y dando la solución en forma vectorial paramétrica, se obtienen bases de los espacios propios:

$$(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A+2I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nota: si no hay tres autovectores independientes, la matriz no se puede diagonalizar.

**Paso 3. Construir la matriz** $P$**.** Las columnas de $P$ son los autovectores:

$$P = \left[\, \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \mathbf{v}_3 \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Paso 4. Construir la matriz** $D$**.** Se colocan en la diagonal de $D$ los autovalores, en el orden correspondiente a como están colocados los autovectores en $P$ ($\mathbf{v}_1$ es el autovector con $\lambda_1 = 1$, y $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ corresponden a $\lambda_2 = -2$:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Se puede comprobar la semejanza chequeando que $AP = PD$ (para no calcular $P^{-1}$)

**Ejercicio 6.23.** ¿ Es $AP = PD$ totalmente equivalente a $A = PDP^{-1}$ ?

**Ejercicio 6.24.** ¿ Es posible diagonalizar $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ?

**Teorema 6.25.** *El que $A$ de $n \times n$ tenga $n$ valores propios diferentes es suficiente para asegurar que es diagonalizable.*

***Ejemplo 6.26.*** ¿ Es diagonalizable $A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$?

**Teorema 6.27.** *Sea $A$ de $n \times n$ cuyos valores propios distintos son $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.*

1. *La dimensión del espacio propio correspondiente a $\lambda_k$, con $1 \le k \le p$, es menor o igual a la multiplicidad de $\lambda_k$*

2. *La matriz $A$ es diagonalizable si y sólo si la suma de las dimensiones de los espacios propios es igual a $n$. Equivalentemente, si la dimensión del espacio propio correspondiente a $\lambda_k$ es igual a la multiplicidad de $\lambda_k$.*

3. *Si $A$ es diagonalizable, $\mathscr{B}_k$ es una base del espacio propio correspondiente a $\lambda_k$, con $k = 1, \ldots, p$, entonces la unión de todos los vectores de $\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p$ es una base de vectores (propios) de $\mathbf{R}^n$.*

*Demostración.* □

***Ejemplo 6.28.*** Diagonalícese, si es posible

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

***Ejemplo 6.29.*** Diagonalícese, si es posible

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## 6.4. Vectores propios y transformaciones lineales

### 6.4.1. Cambio de base y transformaciones lineales

El teorema 4.18 nos asegura que cualquier aplicación lineal $T$ de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$ se puede implementar como una aplicación matricial

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \tag{6.2}$$

donde $A$ es la matriz canónica de $T$. Esta es una matriz $m \times n$ que por columnas se escribía con la acción de la transformacón sobre los vectores de la base $A =$

$\Big[\, T(\mathbf{e}_1) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n) \,\Big]$. Fijémonos primero en el caso particular $n = m$, con lo que $T$ es una transformación lineal de $\mathbf{R}^n$ y $A$ es cuadrada. Vamos a denotar

$$A = [T]_{\mathscr{E}} = \Big[\, T(\mathbf{e}_1) \mid \cdots \mid T(\mathbf{e}_n) \,\Big]$$

indicando que $[T]_{\mathscr{E}}$ es la matriz de la aplicación $T$ que *actúa sobre vectores en coordenadas canónicas*, y retorna valores como vectores también en la base canónica ( más adelante escribiremos también $[T]_{\mathscr{E}} = [T]_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{E}}$ ) La fórmula (6.2) se reescribe como

$$[T\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = A[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = [T]_{\mathscr{E}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} \tag{6.3}$$

Queremos comprender cómo sería la acción de la aplicación sobre vectores coordenados en otra base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ de $\mathbf{R}^n$. Recordemos que la matriz del cambio de coordenadas de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{E}$ es aquella cuyas columnas son los vectores de $\mathscr{B}$ escritos en la base canónica:

$$P_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} = \Big[\, \mathbf{b}_1 \mid \mathbf{b}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n \,\Big]$$

y la ecuación $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$ se escribe en forma matricial

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = P_{\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} \qquad [\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

( $P_{\mathscr{B}}$ "pasa" coordenades en $\mathscr{B}$ a coordenadas en $\mathscr{E}$ ) Quisiéramos encontrar una matriz $B = [T]_{\mathscr{B}}$ que actuara como $T$, pero aceptando vectores $[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$ en coordenadas de $\mathscr{B}$ y retornara el vector resultante en la base $\mathscr{B}$ también:

$$[T\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = [T]_{\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} \tag{6.4}$$

Con el uso de la matriz de cambio de base $P_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}}$ podemos deducir cómo es esta matríz. Podemos multiplicar $P_{\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}$ para pasarlo a coordenadas canónicas, y actuar sobre este vector con $A$, para obtener el vector $[T(\mathbf{x})]_{\mathscr{E}}$:

$$\begin{array}{lll} [\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} & \rightarrow & [\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = P[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} \\ & \rightarrow & [T(\mathbf{x})]_{\mathscr{E}} = A[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}} = AP[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} \end{array}$$

Finalmente, para obtener el vector resultante $[T\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$ hay que cambiar de base $[T\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}$ con la matriz inversa del cambio de base $P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}} = P^{-1}$

$$\rightarrow \quad [T(\mathbf{x})]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}}[T(\mathbf{x})]_{\mathscr{E}} = P^{-1}AP[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$$

Escribiendo todo junto

$$[T\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = \underbrace{P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}}\,\underbrace{[T]_{\mathscr{E}}\underbrace{P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}}\,[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}}_{[\mathbf{x}]_E = P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}}}_{[T\mathbf{x}]_E = [T]_{\mathscr{E}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}}}_{[T\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}}[T\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}}$$

Hemos deducido que

$$[T\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = P^{-1}AP\,[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$$

La fórmula (6.4) era $[T\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = B[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$ con lo que la matriz que buscábamos es $B = [T]_{\mathscr{B}} = P^{-1}AP$. Resumimos con el siguiente resultado.

**Proposición 6.30.** *Sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una aplicación lineal, y sea $[T]_{\mathscr{E}} = A$ su matriz estándar, con $A$ de $n \times n$. El cambio de base de una matriz cuadrada $A = [T]_{\mathscr{E}}$ es una semejanza*

$$[T]_{\mathscr{B}} = P^{-1}[T]_{\mathscr{E}}P \qquad \textit{siendo } P = P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}} \tag{6.5}$$

*La matriz $[T]_{\mathscr{B}} = [T]_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{B}}$ se denomina $\mathscr{B}$-matriz de $T$.*

Hay un modo directo de calcular la $\mathscr{B}$-matriz de $T$. Como $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}$ entonces

$$T(\mathbf{x}) = T(c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n) = c_1T(\mathbf{b}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{b}_n)$$

es el vector resultante. Si lo queremos en coordenadas de $\mathscr{B}$ tenemos que utilizar la aplicación coordenadas

$$[T\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = [c_1T(\mathbf{b}_1) + \cdots + c_nT(\mathbf{b}_n)]_{\mathscr{B}} = c_1[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathscr{B}} + \cdots + c_n[T(\mathbf{b}_n)]_{\mathscr{B}}$$

y escribiendo esto en forma matricial

$$[T\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = \Big[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathscr{B}} \mid [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathscr{B}} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathscr{B}} \,\Big] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [T]_{\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$$

Las columnas de $P_{\mathscr{B}}$ forman una base de $\mathbf{R}^n$, y el teorema de la matriz invertible (teorema 2.27 e. ó h.) implica que $P_{\mathscr{B}}$ es invertible. Podemos decir entonces que $P_{\mathscr{B}}^{-1}$, que actúa como

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B}}^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathscr{E}}$$

es la matriz del cambio de coordenadas de la base canónica a la base $\mathscr{B}$.

Pero, ¿ y si $T$ es una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ arbitrarios ? Si los espacios vectoriales son de dimensión finita, podemos utilizar las coordenadas, tal como hicimos para identificar vectores con vectores de $\mathbf{R}^n$, para identificar la aplicación con una aplicación matricial de $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^m$.

**La matriz de una aplicación lineal.** Sea $T : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ una aplicación lineal cuyo dominio es un espacio vectorial $\mathscr{V}$ de dimensión $n$ y cuyo codomino es un espacio vectorial $\mathscr{W}$ de dimensión $m$. Utilizando una base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{V}$ y una base $\mathscr{C}$ de $\mathscr{W}$, podemos asociar a $T$ una aplicación matricial entre $\mathbf{R}^n$ y $\mathbf{R}^m$.

Efectivamente, dado $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$ tenemos que podemos escribir cualquier $\mathbf{x} \in \mathscr{V}$ en coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}$ respecto a la base $\mathscr{B}$ y $T(\mathbf{x})$ en coordenadas $[T(\mathbf{x})]_{\mathscr{C}}$ respecto a la base $\mathscr{C}$. Sea $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, y sean las coordenadas de $\mathbf{x}$

$$[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

es decir $\mathbf{x} = r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_n\mathbf{b}_n$. Entonces, como $T$ es lineal

$$\mathbf{y} = T(\mathbf{x}) = T(r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_n\mathbf{b}_n) = r_1T(\mathbf{b}_1) + \cdots + r_nT(\mathbf{b}_n).$$

Escribiendo este vector en coordenadas respecto a $\mathscr{C}$ tenemos que

$$\begin{aligned} [\mathbf{y}]_{\mathscr{C}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathscr{C}} &= r_1[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathscr{C}} + \cdots + r_n[T(\mathbf{b}_n)]_{\mathscr{C}} \\ &= \Big[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathscr{C}} \;\Big|\; [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathscr{C}} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathscr{C}} \,\Big] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz $[T]_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = \Big[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathscr{C}} \;\Big|\; [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathscr{C}} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathscr{C}} \,\Big]$ se denomina **matriz de $T$ respecto a las bases $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$**, porque

$$[\mathbf{y}]_{\mathscr{C}} = [T]_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}}.$$

***Ejemplo 6.31.*** Si $\mathscr{V} = \mathbf{R}^n$ y $\mathscr{W} = \mathbf{R}^m$, $\mathscr{B}$ es la base canónica de $\mathbf{R}^n$ y $\mathscr{C}$ la base canónica de $\mathbf{R}^m$, entonces $[T]_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}$ es la matriz canónica de $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, la matriz del teorema 4.18.

***Ejemplo 6.32.*** Sea $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ una base de $\mathscr{V}$, y $\mathscr{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ una base de $\mathscr{W}$. Se define una transformación lineal $T : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ mediante las fórmulas

$$T(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 + 5\mathbf{c}_3 \quad \text{y} \quad T(\mathbf{b}_2) = 4\mathbf{c}_1 + 7\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3.$$

Encuéntrese la matriz de $T$ respecto a las base $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$.

Nos han dado los vectores $T(\mathbf{b}_1)$ y $T(\mathbf{b}_2)$ directamente en términos de la base $\mathscr{C}$:

$$[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathscr{C}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Esos datos son justamente los que son necesarios para construir la matriz pedida:

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathscr{C}} = [T]_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} \quad \text{con} \quad [T]_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Hay que destacar, como es fácil de deducir del ejemplo anterior y de la definición de matriz asociada, que para determinar totalmente una aplicación lineal $T : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ basta dar su valor (en una base cualquiera $\mathscr{C}$ de $\mathscr{W}$) sobre los vectores de una base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{V}$.

***Ejemplo 6.33.*** Si $\mathscr{V} = \mathscr{W}$ y la aplicación es la identidad $T(\mathbf{x}) = Id(\mathbf{x}) = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$, la matriz

$$[Id]_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}} = \Big[\, [I\mathbf{b}_1]_{\mathscr{C}} \mid \cdots \mid [I\mathbf{b}_n]_{\mathscr{C}} \,\Big] = \Big[\, [\mathbf{b}_1]_{\mathscr{C}} \mid \cdots \mid [\mathbf{b}_n]_{\mathscr{C}} \,\Big]$$

es la matriz del cambio de base del teorema 3.61.

**Matriz de una transformación lineal de $\mathscr{V}$.** El caso particular $\mathscr{W} = \mathscr{V}$ de transformaciones lineales, es decir, aplicaciones lineales $T : \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ que actúan sobre un espacio $\mathscr{V}$, es muy común. Lo normal es utilizar la misma base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{V}$ para describir las imágenes y las antiimágenes, es decir, usar $[T]_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{B}}$, matriz que se denota por $[T]_{\mathscr{B}}$ y se denomina **$\mathscr{B}$-matriz de $T$**. Con ello, si $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$:

$$[\mathbf{y}]_{\mathscr{B}} = [T(\mathbf{x})]_{\mathscr{B}} = [T]_{\mathscr{B}}[\mathbf{x}]_{\mathscr{B}} \qquad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathscr{V}.$$

También se dice que $[T]_{\mathscr{B}}$ es **la matriz de $T$ en la base $\mathscr{B}$.**

***Ejemplo 6.34.*** En el ejemplo 3.43 dotamos de coordenadas al espacio $\mathbf{P}_3$ de polinomios de hasta tercer grado, utilizando la base canónica $\mathscr{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$. Con ello vimos que es isomorfo a $\mathbf{R}^4$: para un polinomio de $\mathbf{P}_3$

$$\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \quad \leftrightarrow \quad [\mathbf{p}]_{\mathscr{B}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}.$$

La aplicación $D : \mathbf{P}_3 \to \mathbf{P}_3$, **derivada** respecto de $t$ se define por

$$\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \mapsto D(\mathbf{p}(t)) = \mathbf{p}'(t) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

y sabemos, por lo que conocemos de las propiedades de la derivada, que es lineal. Existirá, por tanto, una matriz que la implementa como aplicación matricial de $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$. Esa matriz se calcula poniendo como columnas los vectores transformados de la base canónica, en coordenadas de la base canonica:

$$D(1) = 0 \leftrightarrow [D(1)]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D(t) = 1 \leftrightarrow [D(t)]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D(t^2) = 2t \leftrightarrow [D(t^2)]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D(t^3) = 3t^2 \leftrightarrow [D(t^3)]_{\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por tanto

$$[D]_{\mathscr{E}} = \Big[\, [D(1)]_{\mathscr{E}} \;\Big|\; [D(t)]_{\mathscr{E}} \;\Big|\; [D(t^2)]_{\mathscr{E}} \;\Big|\; [D(t^3)]_{\mathscr{E}} \,\Big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Es fácil comprobar que

$$[D]_{\mathscr{E}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 3a_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que equivale a

$$\frac{d}{dt}(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2$$

**Transformaciones lineales de $\mathbf{R}^n$.** Cuando en un espacio vectorial $\mathscr{V}$ disponemos de una base $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, tenemos una manera de describir sus vectores como vectores coordenados, creando un isomorfismo entre $\mathscr{V}$ y $\mathbf{R}^n$, y tenemos una manera de describir sus transformaciones lineales como transformaciones matriciales de $\mathbf{R}^n$, usando la $\mathscr{B}$-matriz. Cuando desiponemos de más de una base, tenemos varias maneras de escribir vectores coordenados, y tenemos varias maneras de describir aplicaciones con matrices.

Por ejemplo, consideremos $\mathbf{R}^n$, con la base canónica $\mathscr{E}$, y una matriz diagonalizable $A$ de $n \times n$, con cuyos autovectores podemos construir una base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^n$. Hay dos bases, conocemos la $\mathscr{E}$-matriz de la aplicación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ (la propia $A$), pero esa aplicación tendrá también una $\mathscr{B}$-matriz. Es decir, la aplicación tiene matriz $A$ en la base canónica, y otra matriz diferente en la base $\mathscr{B}$.

**Teorema 6.35.** *Supongamos que $A$ es semejante a una matriz diagonal $D$ de $n \times n$, es decir, $A = PDP^{-1}$. El teorema 6.21 afirma que las columnas de $P$ forman una base $\mathscr{B}$ (de autovectores de $A$) de $\mathbf{R}^n$. Entonces, $D$ es la $\mathscr{B}$-matriz de $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ en esta base:*

$$[T]_{\mathscr{E}} = A \qquad [T]_{\mathscr{B}} = D$$

*Demostración.* Si $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ es base de autovectores de $A$, entonces $A\mathbf{b}_i = \lambda_i \mathbf{b}_i$, $i = 1, \ldots, n$ (puede haber $\lambda_i$'s repetidos, si alguno tiene multiplicidad mayor que 1). La matriz de $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en esa base es

$$\begin{aligned}
[T]_{\mathscr{B}} &= \Big[\, [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathscr{B}} \mid \cdots \mid [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathscr{B}} \,\Big] = \Big[\, [A\mathbf{b}_1]_{\mathscr{B}} \mid \cdots \mid [A\mathbf{b}_n]_{\mathscr{B}} \,\Big] \\
&= \Big[\, [\lambda_1 \mathbf{b}_1]_{\mathscr{B}} \mid \cdots \mid [\lambda_n \mathbf{b}_n]_{\mathscr{B}} \,\Big] = \Big[\, \lambda_1 [\mathbf{b}_1]_{\mathscr{B}} \mid \cdots \mid \lambda_n [\mathbf{b}_n]_{\mathscr{B}} \,\Big] \\
&= \Big[\, \lambda_1 \mathbf{e}_1 \mid \cdots \mid \lambda_n \mathbf{e}_n \,\Big] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = D
\end{aligned}$$

$\square$

Es interesante observar que la matriz $P = \Big[\, \mathbf{b}_1 \mid \cdots \mid \mathbf{b}_n \,\Big]$ es la matriz del cambio de base $P_{\mathscr{E} \leftarrow \mathscr{B}}$, como veremos en el siguietnte párrafo.

***Ejemplo 6.36.*** Si $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ y $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, encuéntrese una base de $\mathbf{R}^2$ en la que la matriz de $T$ sea diagonal.

**Solución:** la base será la base de autovectores utilizada al diagonalizar la matriz. Ya vimos en el ejemplo 6.20 que $A = PDP^{-1}$ con $P$ teniendo como columnas $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Entonces el teorema 6.35 afirma que $\mathscr{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ es una base en la que la aplicación $T$ tiene como matriz

$$[T]_{\mathscr{B}} = D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(ver ejemplo 6.20)}$$

**Semejanza y cambio de coordenadas de transformaciones.** En el teorema 6.35 hemos visto que si una matriz $A$ es semejante a otra $D$, con $A = PDP^{-1}$, entonces $D$ es la matriz $[T]_{\mathscr{B}}$ de $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ en la base $\mathscr{B}$ dada por las columnas de $P$. Como $A$ es la matriz $[T]_{\mathscr{E}}$ de $T$ en la base canónica, y $P = P_{\mathscr{E} \leftarrow \mathscr{B}}$ es la matriz de cambio de coordenadas de $\mathscr{B}$ a $\mathscr{E}$, entonces

$$A = PDP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad [T]_{\mathscr{E}} = P_{\mathscr{E} \leftarrow \mathscr{B}} [T]_{\mathscr{B}} P_{\mathscr{B} \leftarrow \mathscr{E}}$$

ya que $P^{-1} = P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{C}}$. Este hecho es general.

**Teorema 6.37** (Cambio de base de una aplicación matricial)**.** *Sean $\mathscr{B}$ y $\mathscr{C}$ dos bases de $\mathbf{R}^n$, y sea $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ una aplicación lineal cuya matriz en sendas bases es $[T]_{\mathscr{B}}$ y $[T]_{\mathscr{C}}$ respectivamente. Entonces $[T]_{\mathscr{C}} = P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{C}}[T]_{\mathscr{B}}P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{C}}$, es decir*

$$[T]_{\mathscr{C}} = P[T]_{\mathscr{B}}P^{-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad [T]_{\mathscr{B}} = P^{-1}[T]_{\mathscr{C}}P$$

*siendo $P = \Big[\, [\mathbf{b}_1]_{\mathscr{C}} \;\Big|\; \cdots \;\Big|\; [\mathbf{b}_n]_{\mathscr{C}} \,\Big]$ la matriz de cambio de base $P_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}$.*

*Demostración.* Demostración $\square$

***Ejemplo 6.38.*** Sean $A = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuéntrese la $\mathscr{B}$-matriz de $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ (la matriz $A$ en la base $\mathscr{B}$).

**Solución:** La matriz de cambio de base $P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}}$ es $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, y su inversa es $P^{-1} = P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, por lo que

$$\begin{aligned} [T]_{\mathscr{B}} &= P_{\mathscr{B}\leftarrow\mathscr{E}}[T]_{\mathscr{E}}P_{\mathscr{E}\leftarrow\mathscr{B}} \\ &= P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Hay que observar una cosa para capítulos posteriores: el primer vector $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ es un autovector de $A$, con valor propio $-2$. El polinomio característico de $A$ es $(\lambda + 2)^2$, luego sólo tiene un autovalor $-2$. Si calculamos sus autovectores, descubriremos que son $c\mathbf{b}_1$, los múltiplos de $\mathbf{b}_1$, y sólo hay uno linealmente independiente. Por tanto, $A$ **no es diagonalizable**. La matriz $[T]_{\mathscr{B}}$ es lo mejor que podemos encontrar semejante a $A$: no es diagonal, pero al menos es triangular. Se denomina **forma de Jordan** de $A$.

## 6.5. Valores propios complejos

***Ejemplo 6.39.*** La matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es un giro de $+\pi/4$. Su ecuación característica es

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

por lo cual no existe ningún valor propio real de $A$. Sin embargo, permitiendo introducir números complejos, podríamos decir que sus autovalores son $\lambda = \pm\mathrm{j}$. ¿ Y con qué vectores propios ? Calculemos.

$$\lambda = \mathrm{j} \qquad \Rightarrow \quad (A - \mathrm{j}I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\mathrm{j} & -1 \\ 1 & -\mathrm{j} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} j \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = -\mathrm{j} \qquad \Rightarrow \quad (A + \mathrm{j}I)\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{j} & -1 \\ 1 & \mathrm{j} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -j \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para que todo tenga sentido, tenemos que considerar que el conjunto de escalares es $\mathbf{C}$ en lugar de $\mathbf{R}$, y que el espacio vectorial de vectores columna es $\mathbf{C}^2$ en vez de $\mathbf{R}^2$, además de que las matrices puedan estar compuestas por elementos complejos. Con esta ampliación, tiene sentido la diagonalización compleja

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{j} & -\mathrm{j} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{j} & 0 \\ 0 & -\mathrm{j} \end{bmatrix} \frac{1}{2\mathrm{j}} \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{j} \\ -1 & \mathrm{j} \end{bmatrix}$$

***Ejemplo 6.40.*** Diagonalizar la matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$. La ecuación característica y los autovalores son

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 = (\lambda - 1)^2 + 4^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 + 2\mathrm{j}, 1 - 2\mathrm{j}$$

Obsérvese que los autovalores son complejos conjugados entre sí. Ésto siempre sucede si la matriz es de $2 \times 2$ y real. Los autovectores se calculan también los dos a la vez, porque se puede demostrar que también son complejos conjugados si $A$ es real:

$$A - (1 + 2\mathrm{j})I = \begin{bmatrix} 6 - 2\mathrm{j} & -8 \\ 5 & -6 + 2\mathrm{j} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 - \mathrm{j} \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 + \mathrm{j} \end{bmatrix}$$

Por todo

$$\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 + 2\mathrm{j} & 0 \\ 0 & 1 - 2\mathrm{j} \end{bmatrix} P^{-1}, \quad \text{con } P = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 3 - \mathrm{j} & 3 + \mathrm{j} \end{bmatrix}$$

La forma diagonal compleja no tiene mucho interés si trabajamos con matrices reales. Hay una forma de matriz *real* que no es diagonal, pero que será muy útil más adelante, que es la que adopta la matriz $C$ del siguiente teorema.

**Teorema 6.41.** *Sea $A$ una matriz real de $2\times 2$ con valor propios complejo $\lambda = a - b\mathrm{j}$ ( $b \neq 0$ ), y vector propio asociado $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^2$. Entonces*

$$A = PCP^{-1}, \quad donde \quad P = \left[\,\mathrm{Re}\,\mathbf{v} \mid \mathrm{Im}\,\mathbf{v}\,\right] \quad y \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

***Ejemplo 6.42.*** Obsérvese que en el caso de la matriz del ejemplo 6.39, la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, y los autovectores asociados dan lugar a $P = I$, la identidad. La interpretación geométrica de la transformación en $\mathbf{R}^2$ asociada a $A$ es la de una rotación de 90 grados en sentido positivo, siendo evidente que esta aplicación no tiene autovectors. ¿ Cómo son las otras transformaciones $C$ de $\mathbf{R}^2$ que no tienen autovectores ? Tomemos el ejemplo 6.40, de matriz $A = \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$: los autovalores son $1 - 2\mathrm{j}$ y $1 + 2\mathrm{j}$, y el autovector correspondiente a $1 - 2\mathrm{j}$ era $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 + \mathrm{j} \end{bmatrix}$ luego $P = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y la factorización es

$$A = PCP^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

La interpretación geométrica de la transformación asociada a $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ es un giro de ángulo $\arctan b/a$ y además una dilatación de magnitud $\sqrt{a^2 + b^2}$ (ver la fórmula (5.2))

## 6.6. Respuestas a los ejercicios

**6.10** Utilícense los teoremas 6.9 y 3.47.

**6.23** Sólo si $P$ es invertible.

## 6.7. Resumen

**Definición.** *Un **vector propio** (o autovector) de una matriz $A$ de $n \times n$ es un vector $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, distinto de $\mathbf{0}$, tal que para cierto escalar $\lambda \in \mathbf{R}$*

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

*Un escalar $\lambda$ tal, se denomina **valor propio** (o autovalor) de $A$, es decir, $\lambda$ es valor propio de $A$ si existe una solución no trivial de $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, y a $\mathbf{x}$ se lo denomina* vector propio asociado al valor propio $\lambda$.

---

**Teorema** (Teorema de la matriz invertible ó B)**.** *Sea $A$ una matriz $n \times n$ (cuadrada). Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

*a.* *$A$ es invertible.*

*b.* *$A$ es equivalente por filas a la matriz identidad $I_n$.*

*c.* *$A$ tiene $n$ posiciones pivote (es decir, $n$ pivotes no nulos).*

*d.* *La ecuación homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ admite sólo la solución trivial.*

*e.* *Las columnas de $A$ forman un conjunto linealmente independiente.*

*f.* *La transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es biyectiva.*

*g.* *La ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene al menos una solución para todo $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$.*

*h.* *Las columnas de $A$ generan $\mathbf{R}^n$.*

*i.* *La transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es sobreyectiva.*

*j.* *Existe una matriz $C$ $n \times n$ tal que $CA = I$.*

*k.* *Existe una matriz $D$ $n \times n$ tal que $AD = I$.*

*l.* *$A^T$ es invertible.*

*m.* *Las columnas de $A$ forman una base para $\mathbf{R}^n$.*

*n.* $\operatorname{Col} A = \mathbf{R}^n$.

*o.* $\dim \operatorname{Col} A = n$.

*p.* $\operatorname{rango} A = n$.

*q.* $\operatorname{Nul} A = \{\mathbf{0}\}$.

*r.* $\dim \operatorname{Nul} A = 0$.

*s.* *El 0 no es un valor propio de $A$.*

*t.* $\det A \neq 0$.

---