

Apuntes de Álgebra Lineal

Rafael José Hernández Heredero

14 de octubre de 2013

Nota importante: estos apuntes son un borrador de mis clases. No siempre incluyen todo lo explicado en clase, y otras veces contienen más material del requerido. Tampoco están revisados exhaustivamente, contienen erratas y están cambiando constantemente. No deben ser tomados como referencia para los exámenes, ni sustituir en modo alguno la bibliografía ni la asistencia a las clases. En particular, la estructura del curso y muchos ejemplos están tomados del texto [1] de D.C. Lay "Álgebra Lineal", que contiene muchos más ejemplos, ejercicios y material en general, por lo que el estudio de estas notas debe acompañarse con el de ese libro de texto. La utilidad primera de los apuntes es mi propia organización del curso, pero espero que puedan resultaros útiles a vosotros también. Las secciones marcadas con un asterisco* son opcionales. Os agradezco cualquier comentario, sugerencia o corrección que queráis transmitirme.

Rafael Hernández Heredero

Índice general

1. Sistemas de ecuaciones lineales	1
1.1. Sistemas de ecuaciones lineales	1
1.2. Reducción por filas y forma escalonada	8
1.3. Ecuaciones vectoriales	12
1.4. La ecuación matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$	14
1.5. Conjuntos solución de sistemas lineales	18
1.6. Independencia lineal	22
1.7. Respuestas a los ejercicios	26
1.8. Resumen	27
2. Álgebra de matrices	29
2.1. Operaciones con matrices	29
2.2. Inversa de una matriz	34
2.3. Caracterizaciones de matrices invertibles	39
2.4. Matrices elementales*	40
2.5. Matrices partidas*	42
2.6. Factorización LU *	45
2.7. Cuestiones adicionales*	49
2.8. Respuestas a los ejercicios	52
2.9. Resumen	54
3. Espacios vectoriales	57
3.1. Espacios y subespacios vectoriales	57
3.2. Espacios nulos y columna de una matriz	62
3.3. Bases	65
3.4. Sistemas de coordenadas	71
3.4.1. La aplicación de coordenadas	74
3.5. Dimensión de un espacio vectorial	76
3.6. Rango	79
3.7. Cambio de base	82

3.8. Respuestas a los ejercicios	84
3.9. Resumen	85
4. Aplicaciones lineales	87
4.1. Introducción a las aplicaciones lineales	87
4.2. Aplicaciones matriciales	91
4.3. La matriz de una aplicación lineal	93
4.4. Inyectividad y sobreyectividad	96
4.5. Composición de aplicaciones y multiplicación de matrices.	98
4.6. La aplicación de coordenadas	99
4.7. Respuestas a los ejercicios	100
4.8. Resumen	101
5. Determinantes	103
5.1. Introducción a los determinantes	103
5.2. Propiedades de los determinantes	105
5.3. Regla de Cramer, volumen y transformaciones	108
5.4. Respuestas a los ejercicios	109
5.5. Resumen	110
6. Valores propios y vectores propios	111
6.1. Vectores propios y valores propios	111
6.2. La ecuación característica	114
6.3. Diagonalización	116
6.4. Vectores propios y transformaciones lineales	120
6.4.1. Cambio de base y transformaciones lineales	120
6.5. Valores propios complejos	127
6.6. Respuestas a los ejercicios	129
6.7. Resumen	130
7. Ortogonalidad y mínimos cuadrados	131
7.1. Producto interno, longitud y ortogonalidad	131
7.2. Conjuntos ortogonales	135
7.3. Proyecciones ortogonales	140
7.4. El proceso de Gram-Schmidt	146
7.5. Mínimos cuadrados	147
7.6. Regresión lineal	151
7.7. Respuestas a los ejercicios	153
7.8. Resumen	154
8. Diagonalización de matrices simétricas	155

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
8.1. Diagonalización de matrices simétricas	155
8.2. Respuestas a los ejercicios	158
A. Unicidad de la forma escalonada	159

Prefacio

Las secciones y párrafos marcados con un asterisco son material optativo. Los ejercicios marcados con un asterisco son opcionales, ya que presentan una dificultad superior.

