Introducción a las ecuaciones diferenciales lineales

Rafael José Hernández Heredero

3 de diciembre de 2012

1. Ecuación lineal de segundo orden

Una ecuación diferencial lineal de segundo orden es una expresión de la forma

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t) = f(t) \tag{1}$$

que relaciona una función incógnita $x(t)$, con su primera y segunda derivadas $x'(t)$, $x''(t)$ involucrando ciertas funciones coeficientes $p(t)$, $q(t)$ y $f(t)$. La función $x(t)$ se denomina a veces variable dependiente, mientras que la variable t es la variable independiente. Una **solución** de la ecuación diferencial es una función $x(t)$ derivable dos veces que hace que la ecuación se satisfaga idénticamente para todo t.

Se estudia primero el caso con $f(t) = 0$, denominado **caso homogéneo**:

$$x'' + p(t)x'(t) + q(t) = 0 \tag{2}$$

El problema se vuelve más algebraico si pasamos esta ecuación de segundo orden a una de primero con una transformación un tanto peculiar, que requiere escribir una ecuación diferencial sobre un vector de funciones $\mathbf{x}(t)$, en vez de sobre una función escalar $x(t)$. Ese vector de funciones (o función vectorial) es $\mathbf{x}(t) = (x(t), x'(t))$ y el valor de $\mathbf{x}'$:

$$\mathbf{x}' = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ x'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ -px' - qx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p & -q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix}$$

donde hemos definido la derivada de $\mathbf{x}(t)$ como el vector de las derivadas de las componentes. Es decir

$$\boxed{x'' + p(t)x'(t) + q(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}} \quad \text{con } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} \text{ y } A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & -q(t) \end{bmatrix}$$

Esto nos indica que será de interés el estudio de un objeto más general, un **sistema de ecuaciones diferenciales** de primer orden

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 \end{aligned}$$

o más general aún un sistema de $n \times n$:

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$$

siendo $\mathbf{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ un vector de funciones incógnitas y $A(t)$ una matriz de $n \times n$ coeficientes, que son funciones $a_{ij}(t)$ de t. Este objeto incluye como caso particular el caso de la ecuación escalar homogénea (2).

2. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

Estudiamos entonces sistemas de ecuaciones diferenciales con n funciones incógnitas $x_1(t)$, …, $x_n(t)$, denominadas *variables dependientes*. Son funciones que varían de forma continua (y derivable) respecto a un parámetro t, denominado *variable independiente*. El sistema se escribe

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \dots + a_{2n}(t)x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} \tag{3}$$

donde

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \qquad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix}$$

Esta ecuación vectorial es un sistema lineal de ecuaciones diferenciales. En física y teoría de sistemas, se interpreta como un **sistema dinámico**, en el cual la variable independiente es un tiempo t, y las magnitudes $x_i(t)$ son *variables de estado* que evolucionan según la ecuación dada. Una **solución** de (3) es un vector de funciones $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ derivables que satisface la ecuación para un intervalo dado de t. Es muy importante el siguiente resultado sobre el conjunto de soluciones de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.

Teorema 1 (Principio de superposición)**.** *Si* $\mathbf{x}(t)$ *e* $\mathbf{y}(t)$ *son soluciones de* (3)*, entonces cualquier combinación lineal* $c\mathbf{x}(t) + d\mathbf{y}(t)$ *es también solución.*

Demostración. El que $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ sean soluciones equivale a que $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Calculando la derivada

$$(c\mathbf{x} + d\mathbf{y})' = c\mathbf{x}' + d\mathbf{y}' = cA\mathbf{x} + dA\mathbf{y} = A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y})$$

luego $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ es también solución. □

Este resultado demuestra que **el espacio de soluciones de** (3) **es un espacio vectorial**, un subespacio del espacio vectorial de las funciones derivables vectoriales $\mathbf{x}(t)$ sobre el intervalo de t que estemos considerando.

Solución general. En los libros sobre ecuaciones diferenciales [**?**] se demuestra que si los elementos de $A(t)$ son continuos, existe lo que se denomina un **conjunto fundamental de soluciones** de (3): hay n soluciones $\mathbf{x}_i(t)$ linealmente independientes tales que cada solución del sistema (3) es combinación lineal de esas n soluciones. Es decir, un conjunto fundamental de soluciones es una *base* del espacio total de soluciones, que resulta ser un espacio vectorial de dimensión n, y la **solución general** del sistema es la combinación lineal genérica

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{4}$$

con $c_i \in \mathbf{R}$ (ó $\mathbf{C}$) $i = 1, \ldots, n$.

Ejemplo 1. El ejemplo fundamental de la teoría de ecuaciones diferenciales lineales es el sistema de 1×1 de coeficiente constante $a \in \mathbf{R}$, es decir, la ecuación diferencial

$$x' = a\,x, \qquad a \in \mathbf{R}$$

Se trata de la ecuación que modeliza múltiples sistemas; por ejemplo:

- la desintegración de una sustancia radiactiva, ya que la cantidad que se desintegra es proporcional a la cantidad de sustancia.
- La capitalización o amortización a interés compuesto continuo.

- Los procesos de enfriamiento o calentamiento.
- Las descargas o cargas (simples) de condensadores y baterías.

Y, en general, cualquier fenómeno cuya variación instantánea sea proporcional (negativa o positivamente) a su propia magnitud. La datación por Carbono 14 o la averiguación del tiempo de fallecimiento de un cadáver, son aplicaciones más o menos directas de este modelo.

Proposición 1. *Las únicas soluciones posibles de la ecuación*

$$x' = ax \tag{5}$$

son de la forma

$$x(t) = c\exp(at), \tag{6}$$

La letra c denota una constante arbitraria.

Demostración. Sea $x = x(t)$ una solución cualquiera de (5). Según nuestra definición de solución la función $x(t)$ ha de ser derivable, y ha de satisfacer que $x'(t) = ax(t)$. Entonces la función $x(t)\mathrm{e}^{-at}$ es derivable, ya que es producto de dos funciones derivables. y calculando su derivada obtenemos que:

$$\frac{d}{dt}\left(x(t)\mathrm{e}^{-at}\right) = x'(t)\mathrm{e}^{-at} - ax(t)\mathrm{e}^{-at} = ax(t)\mathrm{e}^{-at} - ax(t)\mathrm{e}^{-at} = 0,$$

es nula. Como se demuestra en cálculo infinitesimal, las únicas funciones derivables cuya derivada es nula son las constantes. Por ello

$$x(t)\mathrm{e}^{-at} = c \quad \Rightarrow \quad x(t) = ce^{at}.$$

□

Según el resultado anerior, la solución general (4) de la ecuación (5) es $x(t) = c\exp(at)$, siendo $x_1(t) = \exp(at)$ una única solución fundamental y siendo el espacio de soluciones un espacio vectorial unidimensional, el formado por todos los múltiplos $cx_1(t)$.

En un problema concreto se considera el *problema de valores iniciales*, es decir, un proceso que se modela con la ecuación diferencial (5) y del que además se conoce su estado $x(t_0) = x_0$ en un momento $t = t_0$. Matemáticamente, el problema de valores iniciales en este caso es la unión de la ecuación diferencial y el valor inicial

$$x' = ax, \qquad x(t_0) = x_0.$$

La solución del problema de valores iniciales se encuentra imponiendo la condición inicial a la solución general:

$$x(t_0) = x_0 \quad \Leftrightarrow \quad c\exp(at_0) = x_0 \quad \rightarrow \quad c = x_0\exp(-at_0) \quad \Rightarrow$$
$$x(t) = x_0\exp(-at_0)\exp(at) = x_0\exp[a(t-t_0)]$$

Usualmente se considera el origen de tiempos en $t_0 = 0$, con lo que en este caso quedaría $x(t) = x_0\exp(at)$. A $\tau = 1/|a|$ se la denomina *constante de tiempo* o característica del fenómeno exponencial descrito, ya que si en cierto momento t_0 la función vale $x(t_0)$, en $t = t_0 + \tau$ su valor es $x(t_0+\tau) = \mathrm{e}\,x(t_0)$ (si $a > 0$) o $x(t_0+\tau) = x(t_0)/\mathrm{e}$ (si $a < 0$). Efectivamente, $x(t_0+\tau) = c\exp(a(t_0+\tau)) = c\exp(at_0)\exp(a\tau) = x(t_0)\exp(a/|a|)$.

Ejercicio 1. La cantidad $x(t)$ de un elemento radiactivo en un material obedece una ecuación diferencial (5) con $a < 0$ y por tanto obedece una ley exponencial (6). Se suele considerar el tiempo τ_2 de *semivida* del elemento radiactivo que es el tiempo en el que su cantidad disminuye a la mitad de la inicial. Si τ es la constante de tiempo del proceso de desintegración de un elemento ¿ cuál es su tiempo de semivida ?

Ejemplo 2. El ejemplo más sencillo de sistema con varias variables dependientes lo constituyen los sistemas diagonales. Sea

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \tag{7}$$

El sistema en realidad consta de dos ecuaciones *desacopladas*

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2\,x_1(t) \\ y_2'(t) &= -3\,x_2(t) \end{aligned} \tag{8}$$

que se pueden resolver por separado, con $x_1(t) = c_1\mathrm{e}^{2t}$ y $x_2(t) = c_2\mathrm{e}^{-3t}$. La solución general es

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\mathrm{e}^{2t} \\ c_2\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} \tag{9}$$

y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{e}^{2t}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\mathrm{e}^{-3t}$ forman un conjunto fundamental de soluciones.

El problema de valores iniciales. La solución general (4) del sistema (3) contiene todas sus soluciones. El problema de valores iniciales nos plantea encontrar aquella solución concreta $\mathbf{x}(t)$ que para un valor t_0 de la variable independiente toma un valor dado $\mathbf{x}_0$, es decir, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Esta solución se calcula imponiendo a la solución general esta condición:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = c_1\mathbf{x}_1(t_0) + c_2\mathbf{x}_2(t_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t_0) \equiv X(t_0)\mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = X(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0$$
$$\Rightarrow \qquad \mathbf{x}(t) = X(t)\mathbf{c} = X(t)X(t_0)^{-1}\mathbf{x}_0$$

donde $X(t)$ es una matriz cuyas columnas son el conjunto fundamental de soluciones de la solución general. Es decir, se obtiene un sistema de ecuaciones sobre los coeficientes $c_1,\ldots,c_n$ de la ecuación general, que se resuelve para encontrar la solución al problema de valores iniciales.

Ejemplo 3. Si para el sistema (7) se especifica la condición inicial

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

entonces, introduciendo esta condición en la evolución (9) del sistema se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2\cdot 0} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3\cdot 0} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Se deduce que $c_1 = 1$ y $c_2 = -1$ dan la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-3t} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} \\ -\mathrm{e}^{-3t} \end{bmatrix}$$

La solución general (9) nos sugiere que puede ser que los sistemas $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ (con A constante) admitan soluciones especiales de la forma $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\mathrm{e}^{\lambda x}$ donde $\mathbf{v}$ es cierto vector constante y λ cierto escalar. Si introducimos este candidato a solución en la ecuación, vemos que

$$\mathbf{x}'(t) = \lambda\mathbf{v}\mathrm{e}^{\lambda t} \quad \text{y} \quad A\mathbf{x}(t) = A\mathbf{v}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Se cumple $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ si y sólo si $\lambda\mathbf{v}\mathrm{e}^{\lambda t} = A\mathbf{v}\mathrm{e}^{\lambda t} \Rightarrow \lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v}$, es decir, $\mathbf{v}$ es *un vector propio* de A y λ es *el valor propio* asociado. Estas soluciones especiales son las que pueden proporcionar la solución general de un sistema diferencial (véase la proposición 2)

Teorema 2. *Sea $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ un sistema con coeficientes constantes, ($A \in \mathscr{M}_{n\times n}$ es constante) Entonces, si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A con valor propio asociado λ, la función vectorial*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

es una solución del sistema.

Ejemplo 4. En un condensador, la ecuación característica es $v(t) = q(t)/C$. Como $i(t) = q'(t)$, tenemos que $v'(t) = i(t)/C$. En el circuito de la figura 1, denotando por v_1, v_2 e i_1, i_2 los voltajes y corrientes en los condensadores, se tiene que $v_1 = -(i_1 + i_2)R_1$ y $v_2 = -i_1R_1 - i_2(R_1 + R_2)$

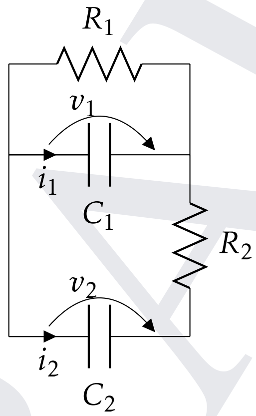

Figura 1: Circuito.

por lo que $i_1 = -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)v_1 + \frac{1}{R_2}v_2$ e $i_2 = \frac{1}{R_2}v_1 - \frac{1}{R_2}v_2$ y por tanto

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{i_1(t)}{C_1} \\ \frac{i_2(t)}{C_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\frac{1}{C_1} & \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}$$

Si $R_1 = 1\,\Omega$, $R_2 = 2\,\Omega$, $C_1 = 1\,\mathrm{F}$ y $C_2 = 0{,}5\,\mathrm{F}$, con un voltaje en $t = 0$ de $5\,\mathrm{V}$ en C_1 y de $4\,\mathrm{V}$ en C_2, entonces podemos averiguar cómo evolucionan $v_1(t)$ y $v_2(t)$ resolviendo problema de valores iniciales siguiente

$$\begin{bmatrix} v_1'(t) \\ v_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} v_1(0) \\ v_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

La matriz $A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ tiene valores propios $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = -2$ con vectores propios correspondientes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Por tanto, la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t/2} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t}$$

y el problema de valores se resuelve sustituyendo $t = 0$ e igualando

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{x}(0) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - c_2 \\ 2c_1 + c_2 \end{bmatrix}$$

Esta igualdad es un sistema de ecuaciones sobre c_1 y c_2 de solución $c_1 = 3$ y $c_2 = -2$, con lo que la solución del problema de valores iniciales es

$$\mathbf{x}(t) = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t/2} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-2t} = \begin{bmatrix} 3\mathrm{e}^{-t/2} + 2\mathrm{e}^{-2t} \\ 6\mathrm{e}^{-t/2} - 2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

En el libro de Lay se puede ver cómo es la estructura del *espacio de fases* (el conjunto de todas las soluciones en el plano x_1–x_2 del sistema considerado) Se observa que el origen es lo que se denomina un **atractor** o sumidero, porque todas las trayectorias acaban en él.

3. Ecuaciones ordinarias de segundo orden de coeficientes constantes

En este párrafo estudiamos un caso muy particular de sistema de dos ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes, aquella que surge, como se discutió en la primera sección, de considerar una **ecuación diferencial homogénea de segundo grado:**

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{10}$$

Esta ecuación diferencial se puede escribir como un sistema, definiendo $x_1(t) = x(t)$ y $x_2(t) = x'(t)$, con lo cual

$$\begin{aligned} x_1' &= y' = x_2, \\ x_2' &= y'' = -a_1 y' - a_0 y = -a_1 x_2 - a_0 x_1 \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica de la matriz es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{11}$$

con lo que los autovalores son

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0}\right)$$

Si $a_1^2 - 4a_0 \neq 0$ los autovalores son distintos, los sistemas de los espacios propios son

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda_1 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \qquad \begin{pmatrix} -\lambda_2 & 1 \\ -a_0 & -a_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

y hay dos autovectores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

con lo que la solución general puede escribirse

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \quad \longrightarrow \quad \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Es decir $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$. El caso en que los autovalores son iguales es algo más complicado, ya que la matriz puede no ser diagonalizable.

Ecuación de orden 2. Hemos de comentar que en la práctica una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes se resuelve de un modo más directo. Se supone una solución de prueba $y(t) = e^{\lambda t}$, que se sustituye en la ecuación. Por ejemplo, para (10) se obtiene

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + a_1\lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} = (\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

que es directamente la ecuación característica. Si tiene dos raíces λ_1 y λ_2 distintas, ya sabemos que la ecuación (10) tiene dos soluciones linealmente independientes $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ que se pueden usar para formar la solución general

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

como habíamos obtenido en la fórmula (12). La solución al problema de valores iniciales requiere conocer $y(t_0)$ e $y'(t_0)$, que permiten calcular los valores de c_1 y c_2 sustituyendo

$$y(t_0) = c_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2 e^{\lambda_2 t_0}, \quad y'(t_0) = c_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} + c_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t_0}$$

El problema surge si la ecuación característica tiene un cero doble $\lambda = \lambda_0$. Se puede demostrar que en ese caso la solución general es de la forma

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_0 t} + c_2\, t\, e^{\lambda_0 t} \tag{13}$$

Ejercicio 2. Demostrad la afirmación anterior, es decir, que (13) es la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2\lambda_0 y' + \lambda_0^2 y = 0$$

La ecuación no homogénea. Estudiemos el problema **no homogéneo**

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t).$$

Para ello, consideremos el sistema de ecuaciones no homogéneo

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \tag{14}$$

y veamos que la estructura del espacio de sus soluciones es muy parecida a la del espacio de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente.

Teorema 3. *Si* $\mathbf{x}(t)$ *y* $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ *son soluciones cualesquiera de* (14)*, entonces su diferencia* $\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t)$ *es solución del sistema homogéneo* (3)*. Por ello, la solución general de* (14) *se puede escribir de la forma*

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{p}(t)$$

siendo $\mathbf{p}(t)$ *un* ***solución particular*** *y* $c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$ *la solución general del sistema homogéneo* (3)*.*

Demostración. El que $\mathbf{x}$ y $\tilde{\mathbf{x}}$ sean soluciones equivale a que $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}+\mathbf{b}$ y $\tilde{\mathbf{x}}' = A\tilde{\mathbf{x}}+\mathbf{b}$. Calculando la derivada

$$(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})' = \mathbf{x}' - \tilde{\mathbf{x}}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b} - A\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{b} = A(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})$$

luego $\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}$ es solución de la ecuación homogénea. Tomando $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{p}$ se obtiene el resultado enunciado. □

Para la ecuación diferencial de segundo orden $y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$ el teorema anterior afirma que la solución es de la forma

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + p(t)$$

si la ecuación característica tiene dos soluciones distintas λ_1 y λ_2 y

$$y(t) = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_0 t} + c_2 t\, \mathrm{e}^{\lambda_0 t} + p(t)$$

si tiene solo una raíz λ_0, siendo $p(t)$ una solución particular del sistema.

Queda por tratar un asunto importante: dada una ecuación con un término no homogéneo $b(t)$ ¿ cómo se calcula la solución particular $p(t)$? En la sección 6 trataremos el caso en el que la función $b(t)$ es una función sinusoidal.

4. Espacio de fases *

Si en un sistema lineal plano (con sólo dos variables de estado x_1 y x_2) los dos autovalores son negativos, entonces el origen es un **atractor**, como en el caso del ejemplo 4. Si los dos autovalores son positivos, se trata de un **repulsor** o fuente. Si un autovalor es positivo y otro negativo, tenemos un **punto silla**, como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Sea el sistema plano $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ con $A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ y la condición inicial $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2{,}9 \\ 2{,}6 \end{bmatrix}$. La solución al problema de valores iniciales se obtiene col los dos pasos del ejemplo anterior: 1) se encuentra la solución general y 2) se introduce en la solución general la condición inicial, para especificar las constantes arbitrarias c_1 y c_2 que aparecen en la solución general.

Como $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ son vectores propios de A correspondientes a los valores propios $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = -1$, la solución general se puede escribir como

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{6t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}$$

siendo las constantes c_1 y c_2 arbitrarias.

El problema de valores iniciales se resuelve sustituyendo $\mathbf{x}(0)$:

$$c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}9 \\ 2{,}6 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}9 \\ 2{,}6 \end{bmatrix}$$

que implica que $c_1 = -3\big/70$ y $c_2 = 188\big/70$, con lo que

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{3}{70} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{6t} + \frac{188}{70} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}$$

La estructura del espacio de fases de un sistema lineal con un punto silla es similar a la de este ejemplo, y está ilustrada en la figura de la pág. 357 del libro de Lay.

*Sección optativa

5. Desacoplo de un sistema dinámico

Si la matriz A de un sistema dinámico $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es diagonalizable, se puede entonces *desacoplar* con un cambio de variables, es decir, definir unas nuevas variables $\mathbf{y}$ dependientes de $\mathbf{x}$ tales que, en ellas, el sistema dinámico es diagonal: $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$. Si $A = PDP^{-1}$ es una diagonalización de A, definiendo

$$\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$$

conseguimos el objetivo. En efecto

$$\mathbf{y}' = \frac{d}{dt}(P^{-1}\mathbf{x}) = P^{-1}\mathbf{x}' = P^{-1}A\mathbf{x} = P^{-1}PDP^{-1}\mathbf{x} = D\mathbf{y}.$$

El sistema en la variable $\mathbf{x}$ tiene entonces la estructura

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{matrix}$$

de soluciones $y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}$ con c_i constantes arbitrarias e $i = 1, \ldots, n$. Para encontrar la forma de la solución en la variable original $\mathbf{x}$ se deshace el cambio de variable

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = \left[\, \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n \,\right]\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

donde $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los vectores y valores propios de A. Esta era la solución que encontrábamos en los ejemplos de la sección anterior. Hay que observar que, si nos plantean además un problema de valores iniciales $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, las constantes c_i se pueden determinar con

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}(0) = P^{-1}\mathbf{x}_0$$

Resumamos todo en una proposición.

Proposición 2. *Sea el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

siendo A de $n \times n$ diagonalizable. Entonces la solución general se puede escribir como

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n \mathbf{v}_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \tag{15}$$

donde $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ son los vectores y valores propios de A. Si además nos dan un valor inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, la solución correspondiente es (15) con

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P^{-1} \mathbf{x}_0$$

La fórmula (15) se puede escribir de forma matricial como

$$\mathbf{x}(t) = \left[\, \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n \,\right] \begin{bmatrix} c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ c_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \left[\, \mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid \cdots \mid \mathbf{v}_n \,\right] \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & & & \\ & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

por tanto

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = P \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & & & \\ & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}_0 = P \mathrm{e}^{Dt} P^{-1} \mathbf{x}_0 = \mathrm{e}^{At} \mathbf{x}_0$$

donde hemos definido

$$\mathrm{e}^{Dt} = \exp\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \right) \equiv \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} & & & \\ & \mathrm{e}^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = I + Dt + \frac{1}{2}(Dt)^2 + \frac{1}{3!}(DT)^3 + \cdots$$

Ejercicio 3. Mostrad que $\mathrm{e}^{At} = P \mathrm{e}^{Dt} P^{-1}$ si $A = PDP^{-1}$ es diagonalizable.

6. La ecuación lineal de orden 2 a coeficientes constantes: el oscilador armónico

La ecuación

$$i'' + \frac{R}{L} i' + \frac{1}{LC} i = \frac{v'(t)}{L} \tag{16}$$

corresponde a un circuito RLC en serie:

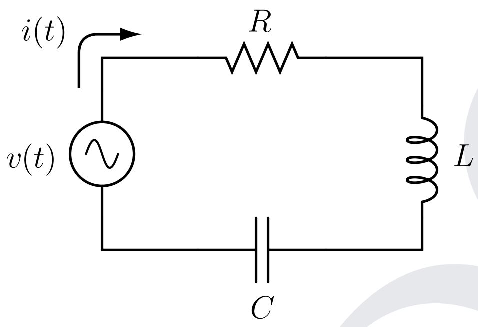

Figura 2: Circuito RLC.

Solución de la ecuación homogénea. Utilizando los resultados de la sección 3 o directamente, podemos calcular las raíces características

$$\lambda_1 = -\frac{R}{2L} + \frac{R}{2L}\sqrt{1 - \frac{4L/C}{R^2}} \qquad \lambda_2 = -\frac{R}{2L} - \frac{R}{2L}\sqrt{1 - \frac{4L/C}{R^2}}.$$

- Si $R > 2\sqrt{L/C}$ el circuito es predominantemente *resistivo*, y la solución de la ecuación homogénea es exponencialmente decreciente (fuertemente amortiguada)

  $$i_h(t) = c_1 \mathrm{e}^{-\lambda_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$$

  siendo $\lambda_1 = -\frac{R}{2L}(1+\Delta)$, $\lambda_2 = -\frac{R}{2L}(1-\Delta)$ con $\Delta = \sqrt{1 - \frac{4L/C}{R^2}} < 1$. Es interesante observar que si $R \gg 2\sqrt{L/C}$ el amortiguamiento más lento tiene exponente

  $$\lambda_2 = -\frac{R}{2L}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{4L/C}{R^2}}\right] \approx -\frac{R}{2L}\left[1 - \left(1 - \frac{2L}{R^2 C}\right)\right] = -\frac{1}{RC}$$

  es decir, la *constante de tiempo* del circuito RC (resultante de hacer $L = 0$)

- El caso $R = 2\sqrt{L/C}$ se denomina *críticamente amortiguado*, y corresponde a una raíz característica $\lambda = -\frac{R}{2L}$ doble, con solución

  $$i_h(t) = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{\frac{R}{2L}t}.$$

- Si $R < 2\sqrt{L/C}$ el circuito es *reactivo*, produciéndose oscilaciones (amortiguadas) Efectivamente, $\lambda_1 = -\frac{R}{2L}(1 + i\Delta)$, $\lambda_2 = -\frac{R}{2L}(1 - i\Delta)$ donde ahora $\Delta = \sqrt{\frac{4L/C}{R^2} - 1}$, quedando la solución de la ecuación homogénea

  $$i_h(t) = \mathrm{e}^{-\frac{R}{2L}t}(c_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_h t} + c_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_h t})$$

con

$$\omega_h = \frac{R}{2L}\Delta = \frac{R}{2L}\sqrt{\frac{4L/C}{R^2} - 1} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{1 - \frac{R^2}{4L/C}}.$$

Pero esta solución es muy incómoda, porque es una respuesta compleja a un problema que inicialmente era real. Teniendo en cuenta la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, podemos arguir que la combinación lineal arbitraria de exponenciales complejas $e^{-i\omega_h t}$ y $e^{i\omega_h t}$ se puede sustituir por una combinación lineal arbitraria de $\cos\omega_h t$ y $\operatorname{sen}\omega_h t$:

$$i_h(t) = e^{-Rt/2L}(c_1 \cos\omega_h t + c_2 \operatorname{sen}\omega_h t)$$

Si $R = 0$, el circuito es totalmente reactivo, no hay amortiguamiento y se producen oscilaciones de frecuencia "natural" $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$:

$$i_h(t) = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \operatorname{sen}\omega_0 t.$$

Todas las soluciones $i_h(t)$ de la ecuación homogénea (si $R \neq 0$) son exponencialmente decrecientes en el tiempo, y representan un *régimen transitorio*, una corriente que tiende a ser despreciable cuando el tiempo tiende a infinito.

Solución particular. Si introducimos en el circuito una señal de entrada $v(t) = V\cos\omega t$, la ecuación (16) queda

$$i'' + \frac{R}{L}i' + \frac{1}{LC}i = -\frac{V}{L}\,\omega \operatorname{sen}\omega t \tag{17}$$

y se establecerá, a medida que el tiempo tiende a infinito, un *régimen estacionario*, una corriente que no decae a cero. Esta corriente estacionaria corresponde a la solución particular, y vamos a comprobar que es de la forma (siempre que $R \neq 0$ u $\omega \neq \omega_0$)

$$i_p(t) = \alpha\cos\omega t + \beta \operatorname{sen}\omega t. \tag{18}$$

Introduciendo $i_p(t)$ como i en (17) tenemos que

$$\left[-\alpha\omega^2 + \frac{R}{L}\omega\beta + \frac{\alpha}{LC}\right]\cos\omega t + \left[-\beta\omega^2 - \frac{R}{L}\omega\alpha + \frac{\beta}{LC} + \frac{V}{L}\omega\right]\operatorname{sen}\omega t = 0$$

y por tanto, igualando a cero los coeficientes de $\cos\omega t$ y $\operatorname{sen}\omega t$, obtenemos

$$\alpha = \frac{VR}{R^2 + X^2}, \qquad \beta = \frac{VX}{R^2 + X^2},$$

siendo X la *reactancia* del sistema, $X = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$.

Ejercicio 4. Demostrar la siguiente fórmula:

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x = A \cos(\omega x + \theta) \tag{19}$$

donde

$$\begin{aligned} a &= A\cos\theta \\ b &= A \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} A &= \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta &= \operatorname{arc\,tg}\frac{a}{b}. \end{aligned}$$

Es decir, en general, la suma de dos sinusoides de la misma frecuencia es otra sinusoide de la misma frecuencia, con amplitud y fase dadas por las fórmulas anteriores.

Según el ejercicio anterior, la solución particular (18) se puede escribir como

$$\begin{aligned} i_p(t) = \alpha\cos\omega t + \beta \operatorname{sen}\omega t &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(\omega t - \theta) \\ &= \frac{V}{\sqrt{R^2+X^2}}\cos(\omega t-\theta) = \frac{V}{Z}\cos(\omega t - \theta) \end{aligned}$$

siendo $Z = \sqrt{R^2+X^2}$, $\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{X}{R}$ la *impedancia* Z y el *desfasaje* θ respectivamente. Existe una manera compacta de escribir la solución particular usando la impedancia compleja

$$Z_C = R + \mathrm{i}X = R + \mathrm{i}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

de modo que si el *voltaje complejo* de entrada al circuito es $v_C(t) = V\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$, la corriente compleja (sólo la solución particular) es

$$i_C(t) = \frac{v_C(t)}{Z_C} = \frac{V\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{R+iX} = \frac{V\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\sqrt{R^2+X^2}} = \frac{V}{Z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\theta)}.$$

Las partes reales de las magnitudes complejas son las magnitudes físicas estudiadas:

$$i(t) = \mathfrak{Re}(i_C(t)) = \frac{V\cos(\omega t-\theta)}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V\omega\cos(\omega t-\theta)}{\sqrt{L^2(\omega^2-\omega_0^2)^2+R^2\omega^2}} = I_0(\omega)\cos(\omega t - \theta).$$

La figura 3 muestra la gráfica de la amplitud

$$I_0(\omega) = \frac{V\omega}{\sqrt{L^2(\omega^2-\omega_0^2)^2+R^2\omega^2}}$$

en la que se aprecia que este circuito tiene un papel *sintonizador:* la intensidad es máxima cuando la frecuencia de entrada es la frecuencia natural del oscilador $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

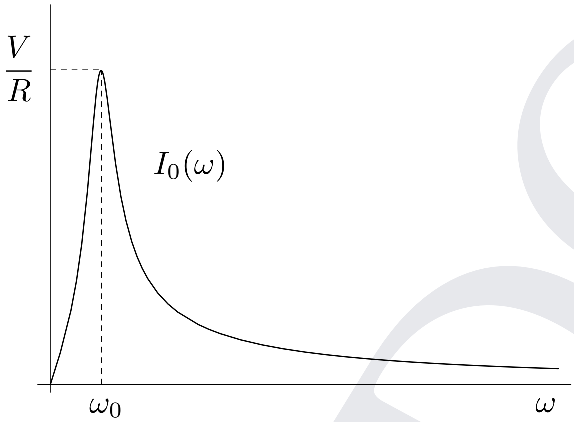

Figura 3: La amplitud de la intensidad $I_0(\omega)$ en el circuito RLC.

7. Ecuaciones diferenciales a coeficientes constantes de orden arbitrario

La solución general del problema de valores iniciales

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad \begin{aligned} y(0) &= y_0, \\ y'(0) &= y_0', \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

corresponde al sistema $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ con $\mathbf{x} = (y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$ con matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

cuya ecuación característica

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_{n-1}-\lambda \end{bmatrix} \\
&= (-a_{n-1}-\lambda)(-\lambda)^{n-1} - (-a_{n-2})(-\lambda)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-2}(-a_1)(-\lambda) + (-1)^{n-1}(-a_0) \\
&= (-\lambda)^n - a_{n-1}(-\lambda)^{n-1} + a_{n-2}(-\lambda)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}a_1(-\lambda) + (-1)^n a_0 \\
& (-1)^n\left[\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0\right] = 0
\end{aligned}
$$

Si hay raíces múltiples, la matriz compañera *no es diagonalizable*. Es más, tiene un autovector por raíz nada más. Para el caso

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_0^2 & 2\lambda_0 \end{bmatrix}, \qquad |A-\lambda I| = (\lambda-\lambda_0)^2,
$$

$$
\mathrm{Nul}(A-\lambda_0 I) = \mathrm{Nul}\begin{bmatrix} -\lambda_0 & 1 \\ -\lambda_0^2 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \mathrm{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_0 \end{bmatrix}\right\}
$$

8. Respuestas a los ejercicios

9. Resumen de resultados

Definición. *Un sistema lineal de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes se escribe como*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

donde $A = A(t)$ es una matriz de $n \times n$ de funciones $a_{ij}(t)$, $\mathbf{x}(t)$ es un vector de funciones incógnitas $x_i(t)$ y $\mathbf{x}(t)$ denota la el vector de derivadas $\mathbf{x}'(t) = (x_1'(t), \cdots, x_n'(t))$.

Teorema (Principio de superposición). *Si $\mathbf{x}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ son soluciones de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, entonces cualquier combinación lineal $c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$ es también solución. El conjunto de soluciones es un espacio vectorial.*

Cualquier solución de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ se puede escribir como combinación lineal de n soluciones $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$,...,$\mathbf{x}_n(t)$:

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

Esta expresión se denomina *solución general* del sistema y las funciones $\mathbf{x}_i(t)$ forman un *conjunto fundamental de soluciones*. El espacio de soluciones es por tanto un espacio vectorial de dimensión n, isomorfo a $\mathbf{R}^n$.

Ejemplo. *Si $n = 1$ y el coeficiente es constante $a \in \mathbf{R}$ se tiene la ecuación de los procesos exponenciales:*

$$x' = a\,x, \qquad a \in \mathbf{R}$$

Proposición. *La solución general de la ecuación*

$$x' = ax$$

es

$$x(t) = c\exp(at),$$

La letra c denota una constante arbitraria.

Teorema. *Sea $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ un sistema con coeficientes constantes, ($A \in \mathscr{M}_{n\times n}$ es constante) Entonces, si $\mathbf{v}$ es un vector propio de A con valor propio asociado λ, la función vectorial*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$$

es una solución del sistema.

Teorema. *La solución general de*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$$

se puede escribir de la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{p}(t)$$

*siendo $\mathbf{p}(t)$ un **solución particular** y $c_1\mathbf{x}_1(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$ la solución general del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.*

Proposición. *Sea el sistema de ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes*

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

siendo A de $n \times n$ diagonalizable. Entonces *la solución general se puede escribir como*

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

donde $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *y* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *son los vectores y valores propios de A. Si además nos dan un valor inicial* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$*, la solución correspondiente es* (15) *con*

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P^{-1}\mathbf{x}_0$$

Proposición. *La ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \qquad a_1, a_2 \in \mathbf{R}$$

tiene por solución general

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

si la ecuación característica

$$\lambda^2 + a_1\lambda + \lambda = 0$$

tiene dos raíces distintas reales λ_1 *y* λ_2*.*

Si la raíces características son complejas, $\lambda_\pm = \kappa \pm i\omega$ *entonces la solución general puede escribirse como*

$$y(t) = e^{\kappa t}(c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t)$$

Si hay una raíz doble λ_0*, la solucion general es*

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_0 t}$$

Proposición. *La ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes no homogénea*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b \cos \omega t + c \operatorname{sen} \omega t$$

tiene por solución general

$$y(t) = y_h(t) + p(t)$$

donde $y_h(t)$ *es la solución de la ecuación homogénea* $y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ *y* $p(t)$ *es una solución particular de la forma*

$$p(t) = b \cos \omega t + c \operatorname{sen} \omega t$$

(siempre que $\omega \neq \sqrt{a_0}$ *) que se encuentra sustituyéndola en la ecuación y resolviendo para las incógnitas b y c.*

Proposición. *La solución al problema de valores iniciales de*

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(t)$$

requiere conocer las condiciones $y(t_0) = y_0$ *e* $y'(t_0) = y_0'$*, y la solución general. Los valores de* c_1 *y* c_2 *se calculan sustituyendo la solución general en las condiciones iniciales.*