

Apuntes de Cálculo I

Rafael José Hernández Heredero

2 de octubre de 2018

Nota importante: estos apuntes son un borrador de mis clases. No siempre incluyen todo lo explicado en clase, y otras veces contienen más material del requerido. Tampoco están revisados exhaustivamente, contienen erratas y errores y están cambiando constantemente. No deben ser tomados como referencia infalible para los exámenes, ni sustituir en modo alguno la bibliografía ni la asistencia a las clases. Su utilidad primera es mi propia organización del curso, pero espero que pueda resultaros útil a vosotros también. Os agradezco cualquier comentario, sugerencia o corrección que queráis transmitirme.

Rafael Hernández Heredero

Índice general

1. Funciones reales de una variable real	1
1.1. Distintos tipos de números	1
1.2. Intervalos y cotas	8
1.3. Funciones reales de variable real	10
1.4. Límite de una función en un punto	23
1.5. Funciones continuas	30
1.6. Derivadas	36
1.7. Propiedades y cálculo de derivadas	39
1.8. Teoremas del valor medio y extremos	41
1.9. Estimaciones de crecimiento. Infinitésimos*	46
1.10. El polinomio de Taylor	49
1.11. Máximos, mínimos y convexidad	56
1.12. Soluciones de algunos ejercicios	59
1.13. Resumen	61
2. La integral	63
2.1. Integral indefinida: primitivas	63
2.2. Integral definida: áreas, teoremas	68
2.2.1. Ejemplos y propiedades de la integral definida.	71
2.3. El teorema fundamental del cálculo infinitesimal	74
2.4. Integrales impropias	76
2.4.1. Definición de integral impropia	77
2.4.2. Criterios de convergencia	79
2.4.3. Más criterios de convergencia*	83
2.4.4. Integrandos no positivos y convergencia absoluta*	85
2.4.5. Valor principal de Cauchy*	86
3. Ecuaciones diferenciales ordinarias	89
3.1. Definición y ejemplos	89
3.2. Solución general. Soluciones singulares	92

3.3. Ecuaciones de primer orden	93
3.4. Métodos elementales de resolución	95
4. Sucesiones y series numéricas	101
4.1. Sucesiones	101
4.1.1. Sucesiones monótonas y de Cauchy	104
4.1.2. Sucesiones de Cauchy*	104
4.2. Series	106
4.2.1. Series de términos positivos	107
4.2.2. Convergencia absoluta y condicional. Reordenación . . .	111
4.2.3. Series telescópicas	114
5. Series de potencias y de funciones	115
5.1. Sucesiones de funciones	115
5.2. Series de funciones	117
5.3. Series de potencias	118
5.4. Series de Taylor	122
5.5. Series de Taylor importantes	124
6. Series de Fourier	129
6.1. Introducción	129
6.2. Los coeficientes de Fourier	130
6.3. Ejemplos de desarrollos	133
6.4. Otros intervalos	135
6.5. Convergencia de la serie de Fourier	137
6.6. Bases ortogonales*	138
A. Conjuntos y operaciones	143
B. Sumatorios	147

Prefacio

Las secciones y párrafos marcados con un asterisco son material optativo. Los ejercicios marcados con un asterisco son opcionales, ya que presentan una dificultad superior.

