

Capítulo 6

Series de Fourier

6.1. Introducción

Joseph Louis Fourier descubrió que muchas funciones (él pensaba que todas) pueden desarrollarse en una serie de funciones trigonométricas de la forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nk_0x + b_n \operatorname{sen} nk_0x). \quad (6.1)$$

La interpretación física de este desarrollo es, cuando menos, fascinante. En la base de la acústica musical, ya los griegos descubrieron que toda nota de la cuerda de un arpa se compone de un tono fundamental y de unos tonos más agudos, que corresponden a los fundamentales de cuerdas más cortas (con la misma tensión) Estos tonos secundarios guardan una relación armónica con el fundamental: el primer tono armónico corresponde al fundamental de una cuerda de longitud mitad que la tocada, el segundo al de una cuerda de tamaño un tercio, el tercero un cuarto, etc. La suma de todos esos tonos armónicos es la nota musical, y la proporción de sus intensidades determina el timbre del instrumento y la forma de la función intensidad sonora en todo momento. Esta descomposición en tonos armónicos se puede encontrar en las notas musicales de cualquier instrumento. Pero es más, se encuentra también en cualquier señal periódica, sea electrónica, electromagnética, gráfica, luminosa, etc. Podemos pues, imaginar, una señal como una suma de señales o tonos fundamentales armónicos, con distintas intensidades. El conjunto de estas intensidades es el espectro de la señal, y la caracteriza totalmente.

Desde el punto de vista matemático, todas las funciones periódicas que aparecen en los fenómenos comentados se modelizan mediante funciones que admiten

el desarrollo (6.1). Los tonos fundamentales son los que corresponden a un senoide de una frecuencia dada, que es la combinación lineal de un coseno y un seno con el mismo argumento, como se deduce de la fórmula:

$$a_n \cos nk_0x + b_n \sin nk_0x = A_n \sin(nk_0x + \phi_n) \quad (6.2)$$

siendo

$$\begin{aligned} a_n &= A_n \sin \phi_n & A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\ b_n &= A_n \cos \phi_n & \phi_n &= \arctg \frac{a_n}{b_n}. \end{aligned}$$

El descubrimiento de los griegos fue que la amplitud de la nota musical, en el tiempo, es

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega_0 t + \phi_n)$$

que es equivalente al desarrollo de Fourier (6.1).

Ejercicio 6.1. Demostrad la fórmula (1.6) (es similar a la del ejercicio 1.48)

6.2. Los coeficientes de Fourier

¿ Cómo resolver el problema del desarrollo de una función $f(x)$ en serie de Fourier (6.1) ?

La suma de una serie de Fourier (6.1), si es convergente, es una función periódica con periodo $2\pi/k_0$, y podemos elegir un intervalo cuya longitud sea la de este periodo para describirla. Es habitual elegir un intervalo simétrico $[-L, L]$ que, si ha de corresponder a un periodo completo, ha de cumplir $2L = 2\pi/k_0$, con lo cual $k_0 = \pi/L$ y el desarrollo se escribe

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{\pi}{L} \Rightarrow \\ f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \end{aligned}$$

Denominaremos intervalo de periodicidad a $[-L, L]$. En general, existen infinidad de desarrollos en serie de funciones de una función dada. Conocemos ya, por ejemplo, los desarrollos en serie de Taylor, en los cuales las funciones básicas son las potencias x^n . En el desarrollo que estamos proponiendo, las funciones básicas son las trigonométricas, por razones físicas como la mencionada en

acústica (el armónico fundamental es el término con $n = 1$, y suele ser el de mayor amplitud) pero también, principalmente, por razones matemáticas: las propiedades algebraicas de estas funciones son muy sencillas. Son ciertas las fórmulas fundamentales

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= 0, & n \neq m \\
 \int_{-L}^L \sen \frac{n\pi x}{L} \cdot \sen \frac{m\pi x}{L} dx &= 0, & n \neq m \\
 \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot \sen \frac{m\pi x}{L} dx &= 0 \\
 \int_{-L}^L \cos^2 \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \sen^2 \frac{n\pi x}{L} dx = L \\
 \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \sen \frac{n\pi x}{L} dx = 0.
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Observemos que si se multiplica el desarrollo de Fourier respectivamente por 1,

Las bandas laterales

Las fórmulas (6.3) son sencillas de demostrar con las fórmulas

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)] \\
 \sen \alpha \sen \beta &= \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)] \\
 \cos \alpha \sen \beta &= \frac{1}{2} [\sen (\alpha + \beta) - \sen (\alpha - \beta)]
 \end{aligned}$$

que tienen interés por si mismas. En la transmisión radiofónica por el método de la amplitud modulada^a (AM) se multiplica una señal portadora, por ejemplo $\cos \Omega t$, de alta frecuencia Ω (frecuencia portadora) por la señal de audio, por ejemplo un tono puro $\cos \omega t$, de frecuencia audible ω , mucho menor que Ω . El resultado de esta modulación es, según la primera fórmula, la suma de dos sinusoides con frecuencias $\Omega + \omega$ y $\Omega - \omega$, muy cercanas por tanto a la portadora. Son las llamadas bandas laterales.

^amás concretamente, DSB-SC “double sideband, suppressed carrier”

$\cos(m\pi x/L)$ o $\sen(m\pi x/L)$ y se integran ambos lados se producen unas interesantes cancelaciones

$$\int_{-L}^L 1 \cdot f(x) dx = \int_{-L}^L 1 \cdot \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L 1 \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L 1 \cdot \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right) = L a_0$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot f(x) dx = \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cdot \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right) = L a_m$$

$$\int_{-L}^L \sen \frac{m\pi x}{L} \cdot f(x) dx = \int_{-L}^L \sen \frac{m\pi x}{L} \cdot \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \sen \frac{m\pi x}{L} \cdot \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sen \frac{m\pi x}{L} \cdot \sen \frac{n\pi x}{L} dx \right) = L b_m$$

Por todo ello ¡ hemos deducido una fórmula para los coeficientes de la serie de Fourier !

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot f(x) dx, \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sen \frac{n\pi x}{L} \cdot f(x) dx.$$

Observación 1. El proceso que hemos utilizado para encontrar los desarrollos de Fourier no es riguroso. No está claro que se pueda integrar término a término la serie que hemos planteado, es decir, que la serie de las integrales sea la integral de la función suma. Tomamos como definición de serie de Fourier de una función $f(x)$ dada para $x \in [-L, L]$ la expresión

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sen \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (6.4)$$

con

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot f(x) dx, \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sen \frac{n\pi x}{L} \cdot f(x) dx. \quad (6.5)$$

En (6.4) hemos sustituido la igualdad de (6.1) por una flecha \rightsquigarrow porque, por lo dicho, no estamos seguros de cómo ni a qué valores converge la serie para cada x . Las funciones usuales admiten el desarrollo de Fourier en aquellos puntos en que son continuas, pero resulta que hay funciones más generales, no derivables, discontinuas etc. que admiten el desarrollo. Enunciaremos más adelante un teorema (Teorema 6.5) dando condiciones suficientes para que el desarrollo sea correcto, es decir, converja a $f(x)$ y qué pasa cuando $f(x)$ es discontinua.

Observación 2. La suma de un desarrollo de Fourier es una función periódica, ya que todos sus términos son periódicos. El desarrollo recoge, según las fórmulas (6.5), información sobre la función en un intervalo finito $[-L, L]$ ignorando los valores de la función fuera de ese intervalo. Por tanto, si desarrollamos una función definida en, por ejemplo, todo \mathbf{R} , mediante un desarrollo de Fourier basado en un intervalo $[-L, L]$, la suma de la serie (si existe) es en el mejor de los casos la *prolongación periódica* de la función en $[-L, L]$, como se ve en la figura 6.1.

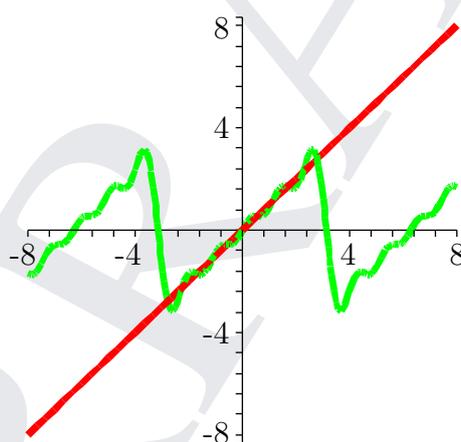


Figura 6.1: Una suma parcial de Fourier que aproxima la prolongación periódica de la función $f(x) = x$ estudiada en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

6.3. Ejemplos de desarrollos

El problema del desarrollo de una función en serie de Fourier se denomina *análisis armónico*. En teoría de señales, por ejemplo, consiste en descomponer una señal periódica dada en sus componentes armónicas. Comencemos con unos ejemplos sencillos.

Ejemplo 6.2. Onda cuadrada. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0] \\ 1 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Los coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot f(x) dx = -\frac{\operatorname{sen} nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{\operatorname{sen} nx}{n\pi} \Big|_0^{\pi} = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cdot f(x) dx = \frac{\cos nx}{n\pi} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{\cos nx}{n\pi} \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} - \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} = \begin{cases} \frac{4}{n\pi}, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

donde hemos usado la fórmula $\cos n\pi = (-1)^n$. El desarrollo es pues

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} x + \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen} 3x + \frac{4}{5\pi} \operatorname{sen} 5x + \dots = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2n+1)x}{2n+1}$$

Ejemplo 6.3. Onda triangular. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x, & x \in [-\pi, 0] \\ \pi - x & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Los coeficientes de Fourier son

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi \text{ (es el área de } f(x)/\pi) \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos nx \cdot (\pi + x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \cdot (\pi - x) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^0 x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x \operatorname{sen} nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^0 \operatorname{sen} nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_{-\pi}^0 \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - \cos(-n\pi)}{n^2} \right] = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right] \\ &= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \left[\frac{2}{n^2} \right] = \frac{4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \operatorname{sen} nx \cdot (\pi + x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nx \cdot (\pi - x) dx = 0 \end{aligned}$$

El desarrollo es pues

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cos x + \frac{4}{9\pi} \cos 3x + \frac{4}{25\pi} \cos 5x + \dots$$

Curiosamente, evaluando en $f(0) = \pi$ obtenemos la serie

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} + \dots$$

que podremos justificar con el teorema 6.5 de la sección 6.5.

Hay varias cosas que notar en estos desarrollos:

1. El primer término $a_0/2$ es el área/ 2π entre el gráfico de la función y el eje x , que resulta ser el valor medio de la función en el intervalo de periodicidad.
2. Las funciones pares sólo tienen términos de cosenos (y el constante) en el desarrollo de Fourier.
3. Las funciones impares tienen sólo términos de seno. Esto es lógico, puesto que los términos de coseno son funciones pares y los de seno funciones impares.
4. Los coeficientes de Fourier decrecen más rápidamente cuanto más suave es la función. En el caso de la onda cuadrada, la discontinuidad produce que los coeficientes decrezcan como $\sim 1/n$. La discontinuidad de la derivada de la onda triangular es una irregularidad más débil, y sus coeficientes de Fourier decrecen con $\sim 1/n^2$ (la señal tiene armónicos más débiles)

6.4. Otros intervalos

El caso más típico de intervalo de periodicidad $[-L, L]$ es el de $L = \pi$. Una función periódica $f(x)$ con intervalo de periodicidad arbitrario $x \in [a, b]$ puede transformarse en otra equivalente $\tilde{f}(\tilde{x})$ de intervalo de periodicidad $\tilde{x} \in [-\pi, \pi]$ con el cambio $\tilde{x} = \frac{2\pi}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)$. Este cambio incluye un desplazamiento hacia la izquierda de valor $(a+b)/2$ (el centro del intervalo $[a, b]$) y un escalamiento para ajustar el intervalo a $[-\pi, \pi]$. Denotando con $\tilde{f}(\tilde{x})$ a la función $f(x)$ en la nueva variable ($\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x)$) las fórmulas del desarrollo de Fourier quedan

$$\tilde{f}(\tilde{x}) \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\tilde{x} + b_n \sen n\tilde{x}) \quad (6.6)$$

y de los coeficientes de Fourier

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\tilde{x}) d\tilde{x}, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \tilde{f}(\tilde{x}) d\tilde{x}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cdot \tilde{f}(\tilde{x}) d\tilde{x}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Ejemplo 6.4. El desarrollo de la función

$$f(x) = x, \quad x \in [1, 2]$$

basado en el intervalo $[1, 2]$. En la variable $\tilde{x} = \frac{2\pi}{b-a} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) = 2\pi \left(x - \frac{3}{2}\right)$ la función $\tilde{f}(\tilde{x})$ es

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = x = \frac{\tilde{x}}{2\pi} + \frac{3}{2}$$

El desarrollo de $\tilde{f}(\tilde{x})$ tiene por coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{x}{2\pi} + \frac{3}{2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3}{2} dx = 3 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \left(\frac{x}{2\pi} + \frac{3}{2}\right) dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cdot \left(\frac{x}{2\pi} + \frac{3}{2}\right) dx = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \left[-\frac{x \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right] = \frac{1}{2\pi^2} \left[-\frac{\pi \cos n\pi}{n} + \frac{-\pi \cos(-n\pi)}{n} \right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

quedando el desarrollo en la variable \tilde{x}

$$\tilde{f}(\tilde{x}) \rightsquigarrow \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen} nx$$

Por lo tanto, en la variable original queda

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sen} 2n\pi \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

Hay que observar que esta serie corresponde a la prolongación periódica de $f(x)$.

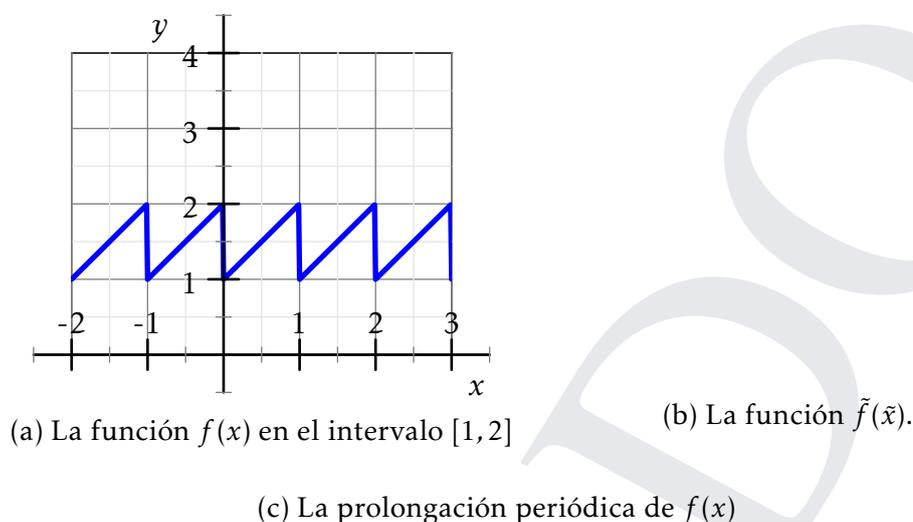


Figura 6.2: El ejemplo 6.4

6.5. Condiciones de convergencia de la serie de Fourier

El análisis armónico puede presentar las mismas dificultades que el problema del desarrollo en serie de Taylor. Al establecer las fórmulas de los coeficientes del desarrollo, hemos supuesto que las integrales pertinentes existen, que la integral se podía conmutar con el sumatorio, que la serie converge, etc. Los coeficientes de Fourier deben estar bien definidos, la serie resultante debe ser convergente, y debe converger a la función desarrollada. Se han descubierto muchas condiciones suficientes de convergencia, algunas muy sofisticadas, pero en la mayoría de las aplicaciones basta el siguiente criterio de convergencia:

Teorema 6.5 (Fundamental). *Si $f(x)$ y su primera derivada son continuas a trozos*, la serie de Fourier converge a $f(x)$ en todos los puntos de continuidad, y a la media de los límites laterales en los puntos de discontinuidad:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

donde $f(x \pm 0) \equiv \lim_{t \rightarrow x^{\pm}} f(t)$ son los límites laterales de $f(x)$ en x . Además, debido a que la serie de Fourier corresponde a la prolongación periódica de $f(x)$, en los extremos del intervalo converge a $\frac{f(a+0) + f(b-0)}{2}$.

*según la definición 1.88, suponemos que tienen límites laterales finitos en los puntos de discontinuidad respectivos

6.6. Bases ortogonales*

¿ Por qué las propiedades de las funciones trigonométricas del desarrollo de Fourier han sido tan convenientes ? Por el conjunto de relaciones (6.3). Estas relaciones, observándolo bien, son iguales a las de unos objetos de la geometría analítica elemental. Llamemos, por ejemplo, como si fueran vectores a

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{v}_2 = \text{sen } x, \quad \mathbf{v}_3 = \text{cos } x$$

y definamos un producto escalar

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j dx, \quad \|\mathbf{v}_i\|^2 = (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i)$$

Integrando, y usando las fórmulas (6.3) se comprueba que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_1\|^2 &= \frac{\pi}{2}, \quad \|\mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_3\|^2 = \pi \\ (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 0 \end{aligned}$$

y esto ¡ se puede interpretar como unas condiciones de ortogonalidad de 3 vectores ! Podemos normalizar estos tres vectores escribiendo

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{cos } x \quad \mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{sen } x.$$

Las fórmulas de los coeficientes de Fourier (6.5) se convierten así en fórmulas de proyección que dan las coordenadas. Si $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ es la base ortonormal canónica de \mathbf{R}^3 , entonces todo vector v de \mathbf{R}^3 se descompone en coordenadas como

$$v = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k}, \quad v_x = (\mathbf{i}, \mathbf{v}), \quad v_y = (\mathbf{j}, \mathbf{v}), \quad v_z = (\mathbf{k}, \mathbf{v})$$

y si $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base ortonormal cualquiera, tenemos la descomposición en coordenadas

$$v = (\mathbf{u}_1, \mathbf{v})\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2, \mathbf{v})\mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_3, \mathbf{v})\mathbf{u}_3.$$

En nuestro caso tenemos que cualquier función $f(x)$ que sea combinación lineal de $1/2$, $\text{cos } x$ y $\text{sen } x$ se escribe

$$\begin{aligned} f(x) &= (\mathbf{u}_1, f(x))\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2, f(x))\mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_3, f(x))\mathbf{u}_3 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \text{cos } x \cdot f(x) dx \right) \text{cos } x + \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } x \cdot f(x) dx \right) \text{sen } x. \end{aligned}$$

La generalización está clara: el espacio de todas las funciones que pueden desarrollarse Fourier en el intervalo $[-\pi, \pi]$ es un espacio vectorial de dimensión infinita, que tiene como “base ortonormal” los infinitos “vectores”

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \mathbf{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \mathbf{u}_5 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \dots$$

Cualquier vector $f(x)$ de este espacio vectorial de funciones puede escribirse como una serie* de la forma

$$f(x) = (\mathbf{u}_1, f(x))\mathbf{u}_1 + (\mathbf{u}_2, f(x))\mathbf{u}_2 + (\mathbf{u}_3, f(x))\mathbf{u}_3 + \dots + (\mathbf{u}_n, f(x))\mathbf{u}_n + \dots$$

que no es ni más ni menos que la serie de Fourier de $f(x)$.

Existen muchas bases ortogonales del espacio funcional compuesto por las funciones representables mediante serie de Fourier (que según el teorema 6.5 incluye las funciones continuas y derivables a trozos) Además del conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[-L, L]$

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{n\pi x}{L}, \sin \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

con desarrollo y coeficientes

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot f(x) dx, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cdot f(x) dx \end{aligned} \quad (6.8)$$

se utilizan tres desarrollos más. El primero es el de la serie de cosenos, y se considera sobre el “semirango” $[0, L]$:

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

con desarrollo y coeficientes

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \\ a_0 &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cdot f(x) dx. \end{aligned} \quad (6.9)$$

*atención: no como una combinación lineal. Ésto quiere decir que en realidad los \mathbf{u}_i no forman una base en el sentido habitual, sino lo que se denomina una *base de Hilbert*. Usaremos de todos modos el nombre de “base ortogonal”.

El segundo, también considerado sobre $[0, L]$, es el de la serie de senos

$$\left\{ \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

con desarrollo y coeficientes

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \quad (6.10)$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \cdot f(x) dx.$$

Y el tercero es el más usado en teoría de señales, el de la serie de exponenciales compleja (que se considera sobre el rango entero $[-L, L]$)

$$\left\{ e^{i \frac{n\pi x}{L}} \right\}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

con desarrollo y coeficientes

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} \quad (6.11)$$

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L e^{-i n\pi x/L} \cdot f(x) dx.$$

(Atención al signo menos de la exponencial del integrando) Es sencillo comprobar que el desarrollo de cosenos corresponde al desarrollo de Fourier en senos y cosenos de la *extensión par* de la función $f(x)$ al rango completo $[-L, L]$. Análogamente, el desarrollo de senos es el desarrollo de Fourier en senos y cosenos de la *extensión impar* de $f(x)$ a $[-L, L]$. Se puede demostrar también que el desarrollo en exponenciales complejas de una función real $f(x)$ es equivalente al desarrollo en senos y cosenos:

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \Rightarrow c_{-n} = \bar{c}_n \quad \text{y si } c_n = \frac{a_n}{2} - i \frac{b_n}{2}$$

$$\Rightarrow c_{-n} e^{-i \frac{n\pi x}{L}} + c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}} = a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \text{sen } \frac{n\pi x}{L}.$$